2BACSPF & 2BACSVTF

SEMESTRE 1

07 Cours bien détaillés

07 Résumés bien précis

07 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

06 Devoirs surveillés

Extraits du bac

Examen blanc corrigé

2025/2026

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Version, 03/09/2025

Table des matières

1 : Continuité

Cours 1 03

Résumé 1 16

Série 1 18

2 : Dérivation

Cours 2 20

Résumé 2 27

Série 2 29

Devoir Libre 1 30

Devoir surveillé 1-A 31

Devoir surveillé 1-B 32

3 : Etude de fonctions

Cours 3 33

Résumé 3 41

Série 3 42

4 : Suites numériques

Cours 4 45

Résumé 4 51

Série 4 52

5 : Primitives

Cours 5 54

Résumé 5 62

Série 5 63

Devoir Libre 2 64

Devoir surveillé 2-A 65

Devoir surveillé 2-B 66

6 : Fonctions logarithmes

Cours 6 67

Résumé 6 71

Série 6 72

7 : Les nombres complexes

Cours 7 75

Résumé 7 84

Série 7 86

Devoir Libre 3 88

Devoir surveillé 3-A 89

Devoir surveillé 3-B 90

Examens blancs corrigés : 91

Corrections des séries et des devoirs libres :

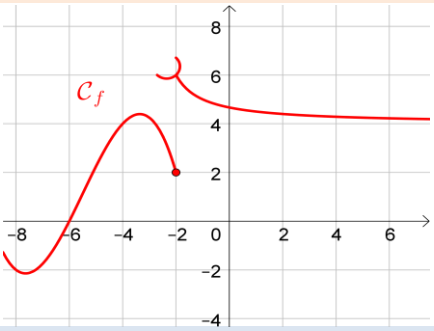
https://drive.google.com/file/d/1briEonJPH__eO__0t7oA8h3tY5zFEp0LVC/view?usp=sharing

01
Continuité

HIYAB

1) La continuité en un point - La continuité sur un intervalle

Activité 1 :



Considérons la fonction f dont la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ est le suivant :

1) Déterminer graphiquement : $f(-6)$ et $\lim\limits_{x\to -6} f(x)$. Que peut-on déduire ?

2) Déterminer graphiquement : $f(-2)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$.

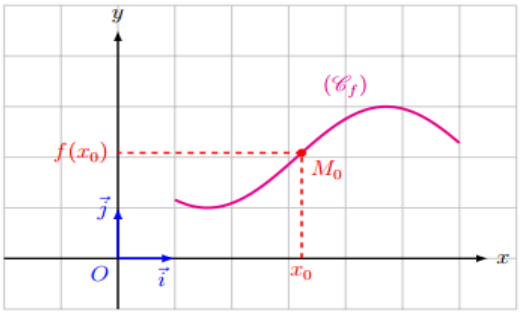
3) Que peut-on dire sur $(\mathcal{C}_f)$ au point $x_0 = -2$?

Définition 1 :

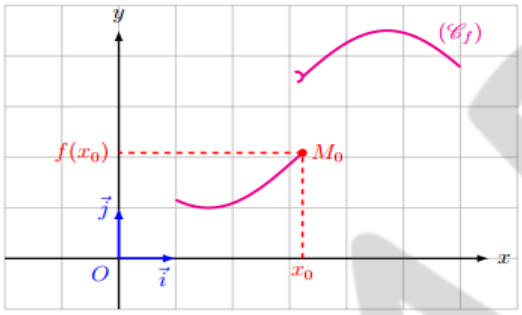
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un élément de I .

f est **continue en** x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Interprétation graphique



f est **continue en** x_0



f est **discontinue en** x_0

Exemples 1

1) Montrons que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ est continue en 1.

On a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2 = f(1)$

Par suite la fonction f est continue en 1.

2) Montrons que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x} \quad si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est discontinue en 0.

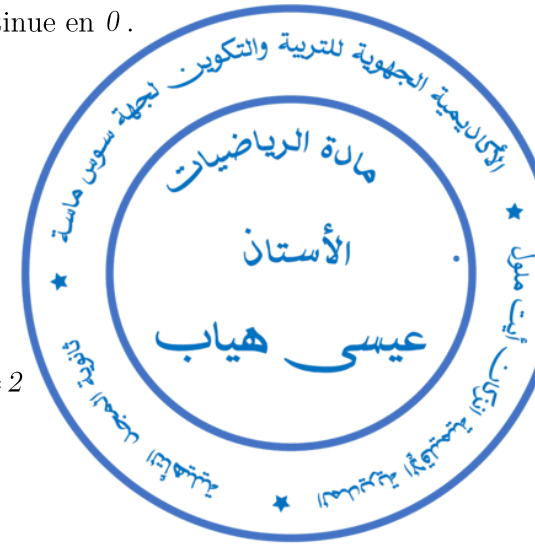
On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2\times\left(\dfrac{\sin(2x)}{2x}\right) = 2\times 1 = 2 \neq f(0)$

Par suite la fonction f est discontinue en 0.

Application 1

Etudier la continuité de f au point x_0 dans les cas suivants :

1) $x_0 = 1$; $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$; 2) $x_0 = 2$; $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2} ; x \neq 2 \\ f(2) = 12 \end{cases}$



Exercice 1

1) Etudier la continuité de f au point x_0 dans les cas suivants :

a) $x_0 = -1$; $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{x^2-1} ; x \neq -1 \\ f(-1) = 5 \end{cases}$; b) $x_0 = 0$; $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+\tan(2x)}{\sin(3x)} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

2) Déterminer la valeur de a pour que la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{4x^2-3x-27}{x-3} ; x \neq 3 \\ f(3) = a \end{cases}$ soit continue en 3.

Définition 2 : La continuité à droite - la continuité à gauche en un point :

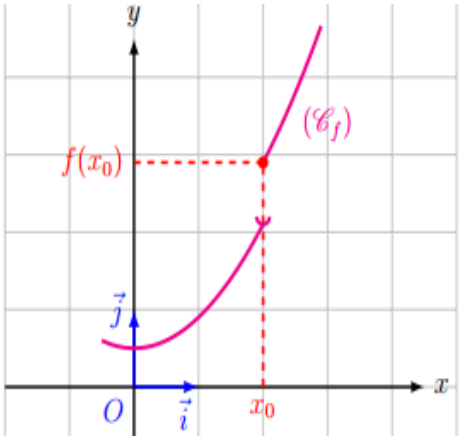
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[x_0;x_0+\alpha[$ avec $\alpha>0$.

On dit que f est **continue à droite en** x_0 si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)$.

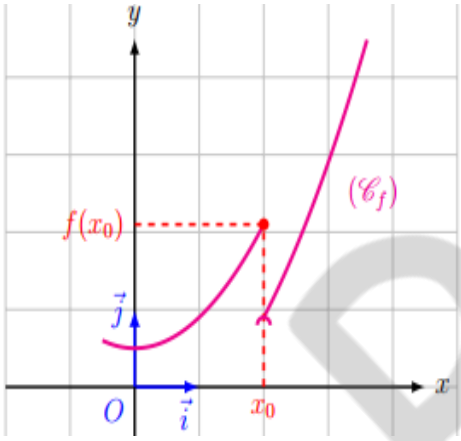
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]x_0-\alpha;x_0]$, avec $\alpha>0$

On dit que f est **continue à gauche en** x_0 si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$

Interprétation graphique



f est continue à droite en x_0



f est continue à gauche en x_0

Exemples 2

Étudions la continuité de la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-2}{x+1} & ; x>0 \\ f(x)=3-x^2 & ; x\le 0 \end{cases}$ à gauche et à droite en 0.

On a : $f(0)=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{0-2}{0+1}=-2$

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)\neq f(0)$, alors la fonction f n'est pas continue à droite en 0.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 3-x^2=3-0=3=f(0)$

Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=f(0)$, alors la fonction f est continue à gauche en 0.

Propriété 1 :

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

En d'autres termes : f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$

Application 2

On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=x-1 & ; x\ge 1 \\ f(x)=(x-1)^2 & ; x<1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f à droite et gauche en 1.

2) f est-elle continue en 1 ?

Exercice 2

1) Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & ; x>0 \\ f(x)=\dfrac{\cos(x)+\sin(x)-1}{4x} & ; x<0 \\ f(0)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

a) Etudier la continuité de f à droite et gauche en *1.*

b) f est-elle continue en 1 ?

2) Déterminer la valeur de a et b pour que g définie par $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x-1} & si\ x<1 \\ g(x)=x^2+b & si\ x\geq 1 \end{cases}$ soit continue en 1.

3) Etudier la continuité de la fonction h définie par : $\begin{cases} h(x)=\dfrac{\sqrt{1+sin(x)}-1}{x} & si\ x<0 \\ h(x)=\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{2} & si\ x\geq 0 \end{cases}$ en 0.

Définition 3 : Continuité sur un intervalle :

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

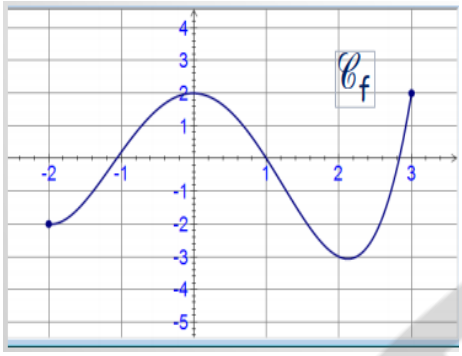
- On dit qu'une fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, si elle est continue en tout élément de cet intervalle.
- On dit qu'une fonction f est continue sur le segment $[a;b]$, si elle est continue sur l'intervalle $]a;b[$ et continue à droite en a et à gauche en b

Remarque 1 :

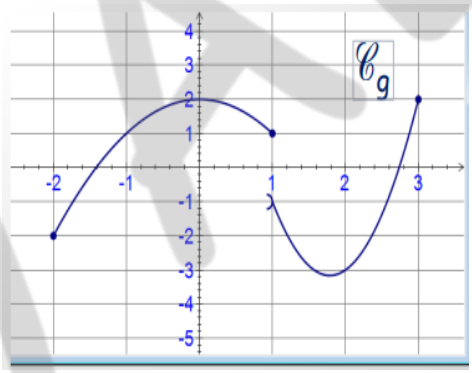
De façon analogue, on définit la continuité d'une fonction f sur les intervalles $[a;b[$, $]a;b]$, $[a;+\infty[$ et $]-\infty;a]$.

Exemple 3

La fonction f représentée ci- dessous est continue sur $[-2;3]$



La fonction g représentée ci- dessous n'est pas continue sur $[-2;3]$



Propriété 2 :

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x\mapsto sin(x)$, $x\mapsto cos(x)$ et $x\mapsto|x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$
- La fonction $x\mapsto tan(x)$ est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exemple 4 :

1) La fonction $f:x\mapsto x^5+x^3+4x^2+3$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle est une fonction polynômiale.

2) La fonction $g:x\mapsto\dfrac{4x^2+3}{x-2}$ est continue sur $]2;+\infty[$ parce que g est une fonction rationnelle et : $]2;+\infty[\subset D_g$

Application 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1} & si\quad x<-1 \\ f(x)=5x^2+x-2 & si\quad x\geq -1 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $[-1;+\infty[$

2) Montrer que la fonction f est continue sur $]-\infty;-1[$

3) Calculer $f(-1)$ et montrer que f est continue à gauche en -1.

4) En déduire que la fonction f est continue sur $]-\infty;-1]$ et sur $\mathbb{R}$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Définition 4 : Fonction partie entière.

La fonction qui à tout nombre réel x associé l'unique entier relatif p qui vérifie $p \le x < p+1$ est appelée **fonction partie entière**. L'image de x par cette fonction est notée $E(x)$ ou $[x]$.

Exemples 5 :

$E(3,3)=3$; $E(0.5)=0$; $E(-7,99)=-8$; $E\left(\frac{9}{5}\right)=1$; $E(7)=7$; $E(\pi)=3$; $E(-0,23)=-1$; $E\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=3$

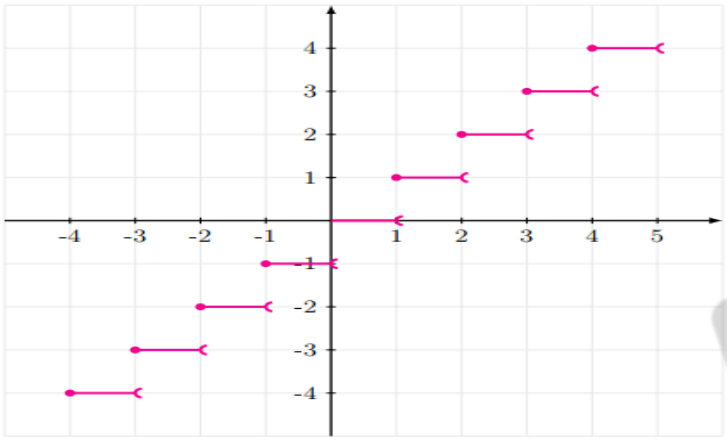
Conséquences :

Pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout p de $\mathbb{Z}$, on a :

- $E(x)=x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
- La fonction partie entière est continue à droite en p et discontinue à gauche en p.
- La fonction partie entière n'est pas continue en p
- La fonction partie entière est continue sur l'intervalle $[p;p+1[$.

المادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Courbe représentative de la fonction partie entière :



2) L'image d'un intervalle par une fonction continue

Définition 5 :

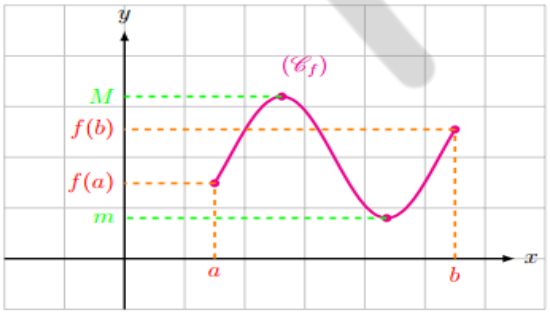
- L'image d'un intervalle I par une fonction f est l'ensemble des images de tous les nombres de I par f on la note par $f(I)$.
- $f(I)=\{f(x) / \quad x \in I\}$

Propriété 3 : L'image d'un intervalle -L'image d'un segment

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment (intervalle fermé).

Remarque 2 :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, alors $f([a;b])=[m;M]$ où m est la valeur minimale de la fonction f sur l'un intervalle $[a;b]$, et M est la valeur maximale de la fonction f sur l'un intervalle $[a;b]$



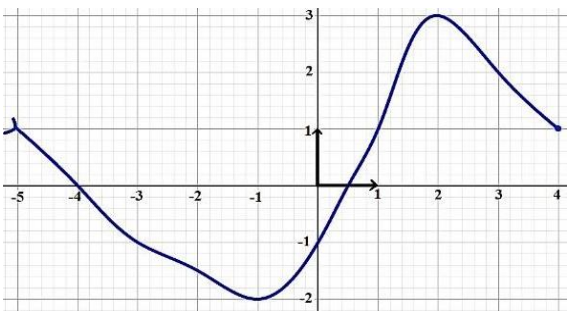
Exemple 6 :

Soit f une fonction numérique définie par la courbe ci-dessous :

à partir de la courbe de la fonction f, on déduit que :

$f(]-5;-1])=[-2;1[$; $f([-1;2])=[-2;3]$;

$f([2;4])=[1;3]$; $f(]-5;4])=[-2;3]$



Propriété 4 : Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

L'intervalle I	$f(I)$	
	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$
$]-\infty;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$
$]-\infty;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$

Exemple 7 :

Soit f une fonction continue et définie sur $\mathbb{R}^*$ par le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↗	2	↘	$+\infty$

• On a : $f(]-\infty;-1])=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);f(-1)\right]$ (Car la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-1]$.

C'est à dire $f(]-\infty;-1])=]-\infty;-2]$

• Comme f est une strictement décroissante sur l'intervalle $[-1;0[$.

Alors $f([-1;0[)=\left]\lim\limits_{x\to0^-}f(x);f(-1)\right]=]-\infty;-2]$

• Comme f est une strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1]$.

Alors $f(]0;1])=[f(1);\lim\limits_{x\to0^+}f(x)[=[2;+\infty[$

• Comme f est une strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Alors $f([1;+\infty[)=[f(1);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)[=[2;+\infty[$

Application 4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Etudier la monotonie de f sur D_f.

3) Déterminer l'image des intervalles suivants $I=]-\infty;-2]$; $J=]-\infty;-1[$; $K=]-1;3]$; $L=[2;4]$; $M=]-1;+\infty[$

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x+1$.

Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par la fonction f : $I=]-\infty;-1]$: $J=]0;1[$: $K=]0;+\infty[$

Remarque 3 :

Pour toute fonction numérique f définie sur un intervalle I on a $f(I)\subset\mathbb{R}$

3) Opérations sur les fonctions continues

Propriété 5 :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions définies sur I.

1) Si u et v sont continues sur I.

Alors les fonctions $u \pm v$, $u \times v$, $\alpha \times u$, $|u|$ et u^n sont continues sur I. $(\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$

2) Si u est continue sur I et $(\forall x \in I)\ \ u(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{u}$ est continue sur I.

3) Si u et v sont continues sur I et $(\forall x \in I)\ \ v(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est continue sur I.

4) Si u est continue sur I et $(\forall x \in I)\ \ u(x) \geq 0$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I.

Exemple 8 :

1) La fonction $f : x \mapsto 4x^2 + 3 + sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continue sur $\mathbb{R}$ qui sont : $x \mapsto 4x^2 + 3$ et $x \to sin(x)$

2) La fonction $f : x \mapsto (x^2 + 2x)\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que produit de deux fonctions continue sur $\mathbb{R}^+$ qui sont : $x \mapsto x^2 + 2x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

3) La fonction $f : x \mapsto \frac{cos(x)}{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet :

- ✓ la fonction $x \mapsto cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- ✓ la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

4) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet :

- ✓ la fonction $x \mapsto x^2 + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 2 > 0$.

Application 5 :

Montrer que f est continue sur I dans les cas suivants :

$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2+1}$; $I = [-3; +\infty[$; $f(x) = \frac{4x+1}{x^2-1} sin(x)$; $I =]1; +\infty[$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+1}$; $I = [0; 3]$; $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 4

1) Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} & si \quad x < -1 \\ f(x) = 5x^2 + x - 2 & si \quad x \geq -1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) Soit f la fonction numérique définie sur $]-4; +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 4 \end{cases}$

Etudier la continuité de la fonction f sur $]-4; +\infty[$.

Propriété 6 : Continuité du composé de deux fonctions

Soient u et v deux fonctions et I un intervalle donné.

1) Si u est continue en l et v est continue en $u(l)$ alors la fonction $f = vou$ est continue en l

2) Si u est continue sur l'intervalle I et si v est continue sur un intervalle J et $u(I) \subset J$.

Alors la fonction $f = vou$ est continue sur l'intervalle I.

Exemple 9 :

1) $f : x \mapsto cos(x^2 + 3x - 2)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Car $f = vou$ et :

- La fonction $u : x \mapsto x^2 + 3x - 2$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$
- La fonction $v : x \mapsto cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) $f:x\mapsto\sqrt{\dfrac{x}{1+sin^2(x)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Car $f=vou$ et :

- La fonction $u:x\mapsto\dfrac{x}{1+sin^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- $f(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$
- La fonction $v:x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Application 6

Déterminer les fonctions u et v tel que $f=vou$ puis montrer que f est continue sur I dans les cas suivants :

1) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$; $I=]-\infty;-2]$; 2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x-1}}$; $I=]1;+\infty[$;

3) $f(x)=sin(2x^2+1)$; $I=\mathbb{R}$; 4) $f(x)=cos\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)$; $I=\mathbb{R}$

Propriété 7 :

Si $lim(u(x))=l$ et v est continue en l alors $lim(vou(x))=v(l)$.

Application 7

Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} sin\left(\dfrac{\pi x+3}{2x-7}\right)$

4) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$.

Version 1

$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a;b] \\ k \text{ est compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases}\Rightarrow$ Il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c)=k$.

Version 2

$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a;b] \\ k \text{ est compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases}\Rightarrow$ L'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$

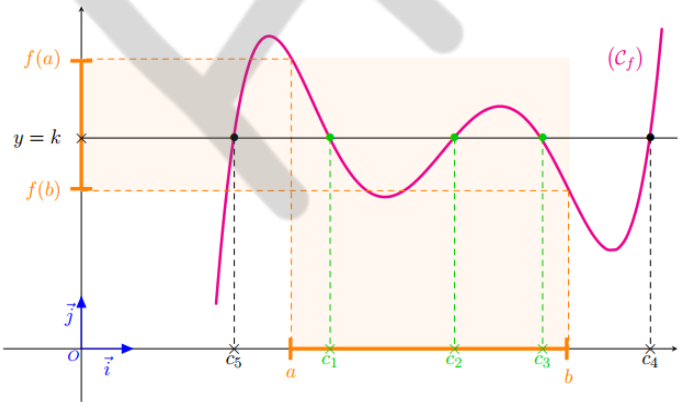
Remarque 5 :

Si de plus f est strictement monotone sur $[a;b]$, alors cette solution est unique.

Interprétation graphique :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$ et $k\in\mathbb{R}$

Si f est continue sur $[a;b]$ et k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$



Alors la droite d'équation $y=k$ et la courbe représentative de f sont nécessairement sécantes.

Exemple 10 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^4+x^2+4x$

Montrons que l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0;1]$

La fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0;1]$, de plus $f(0)<1<f(1)$ (car $f(0)=0$ et $f(1)=6$)

Donc d'après le TVI l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Version 3 de T.V.I

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$

$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a;b] \\ f(a)\times f(b)<0 \end{cases} \Rightarrow$ L'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[a;b]$ (et dans $]a;b[$)

Si de plus f est strictement monotone sur $[a;b]$, alors cette solution est unique.

Exemple 11 :

Montrons que l'équation $x^3+x+1=0$ admet une unique solution α tel que $-1<\alpha<0$

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3+x+1$, on a :

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-1;0]$
- La fonction f est strictement croissante sur $[-1;0]$, en effet $f'(x)=3x^2+1>0$
- $f(0)f(-1)<0$, en effet : $f(0)=1>0$ et $f(-1)=-1<0$

Donc d'après le T.V.I, l'équation $x^3+x+1=0$ admet une unique solution α tel que $-1<\alpha<0$.

Application 8

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2x^3-5x^2-3$

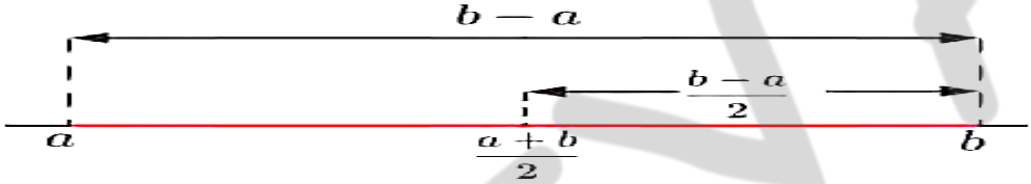
1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\frac{5}{2};3\right]$

2) Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;3]$

Méthode de dichotomie pour encadrer les solutions de l'équation $f(x)=0$

Rappel : Centre et longueur d'un intervalle :

Soit I l'un des intervalles suivants : $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$ et $]a;b[$



- On appelle centre de l'intervalle I le nombre réel $\frac{a+b}{2}$.
- On appelle l'amplitude (ou la longueur) de l'intervalle I le nombre réel $b-a$.

Méthode de dichotomie :

Supposons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans l'intervalle I ($I=[a;b]$ ou $[a;b[$ ou $]a;b]$ ou $]a;b[$)

Pour déterminer un encadrement de α avec une amplitude (précision) donnée, on suit les étapes suivantes :

On calcule le nombre $c=\frac{a+b}{2}$ le centre de l'intervalle $[a;b]$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

- Si ($f(a)<0$; $f(c)>0$; $f(b)>0$) ou ($f(a)>0$; $f(c)<0$; $f(b)<0$) alors $f(a)\times f(c)<0$ donc $\alpha\in]a;c[$
- Si ($f(a)<0$; $f(c)<0$; $f(b)>0$) ou ($f(a)>0$; $f(c)>0$; $f(b)<0$) alors $f(b)\times f(c)<0$ donc $\alpha\in]c;b[$

On continue en testant le milieu du nouvel intervalle jusqu'à trouver l'amplitude (la précision) demandée.

Exemple 12 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-6x^2+6$.

1) Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que $-1<\alpha<0$:

On a la fonction f est bien continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[-1;0]$

Et on a $f(0)=6>0$ et $f(-1)=-1<0$, donc $f(0)\times f(-1)<0$

alors d'après TVI l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α tel que $-1<\alpha<0$.

2) Déterminons un encadrement de α d'amplitude $0,25$:

On a : $-1<\alpha<0$, cet encadrement est d'amplitude $0-(-1)=1$.

Le centre de l'intervalle $[-1;0]$ est $\frac{-1+0}{2}=-\frac{1}{2}$, et on a : $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6=\frac{35}{8}>0$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Comme $f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f(-1)<0$ alors $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$, cet encadrement est d'amplitude $\left(-\frac{1}{2}\right)-(-1)=0.5$

Le centre de l'intervalle $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ est $\frac{-\frac{1}{2}+(-1)}{2}=-\frac{3}{4}$, et on a : $f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{141}{64}>0$

Comme $f(-1)\times f\left(\frac{-3}{4}\right)<0$ alors $-1<\alpha<-\frac{3}{4}$,

Cet encadrement est d'amplitude $\left(-\frac{3}{4}\right)-(-1)=\frac{1}{4}=0,25$, la précision voulue.

Version 4 de T.V.I (cas général) : Théorème de la bijection

Si f est continue sur un intervalle I.

Alors pour tout réel $k\in f(I)$ l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans I.

Si de plus f est strictement monotone sur I, alors cette solution est unique.

Application 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3+3x-4$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2) Vérifier que : $0<\alpha<1$.

3) Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,25$.

4) Donner le signe de f sur $\mathbb{R}$

5) Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Activité 2 :

Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $I=[1;3]$ par : $f(x)=x^2-2x$.

1) Montrer que la fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I.

2) Déterminer l'intervalle J l'image de l'intervalle I par la fonction f.

3) Soit $x\in J$ et $y\in I$. Montrer que : $f(y)=x\Leftrightarrow y=1+\sqrt{1+x}$ (Remarquer que $y^2-2y=(y-1)^2-1$)

→ La fonction définie sur J par $x\mapsto 1+\sqrt{1+x}$ est appelée la fonction réciproque de f, on la note f^{-1}

Ainsi : $(\forall x\in J)\quad f^{-1}(x)=1+\sqrt{1+x}$

4) Montrer que $(\forall x\in I);(f^{-1}of)(x)=x$ et $(\forall x\in J)\ (fof^{-1})(x)=x$

Propriété 8 :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases} \Rightarrow f \text{ admet une fonction réciproque } f^{-1} \text{ définie sur } J=f(I)$$

Application 10

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur intervalle J à déterminer dans les cas suivants :

$f(x)=x^2-2x+5$ et $I=[1;+\infty[$; $f(x)=4x-x^2$ et $I=]-\infty;2]$

$f(x)=\sqrt{x^2-x}-x$ et $I=[0;+\infty[$; $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$ et $I=\left[0;\sqrt{2}\right]$

Remarque 6 :

Pour déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$, on résout l'équation $f(y)=x$ d'inconnue $y\in I$

Et on a $f(y)=x\Leftrightarrow f^{-1}(x)=y$

Exemple 13 :

On considère la fonction f définie sur $I=[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}$

1) Montrons que f admet une fonction réciproque

f est continue et strictement croissante sur I, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=f(I)=[0;+\infty[$

2) Déterminons l'expression de f^{-1}

Soit $x \in J$, résolvons dans I l'équation $f(y)=x$

On a : $f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{y}=x$

$\Leftrightarrow y=x^2 \in I$. D'où : $(\forall x \in J),\ f^{-1}(x)=x^2$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $I=]-\infty;3]$ par : $f(x)=\left(\sqrt{3-x}+1\right)^2$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur intervalle J à déterminer

2) Déterminer l'expression f^{-1} pour tout $x \in J$

Propriétés 9 : Les propriétés de la fonction réciproque

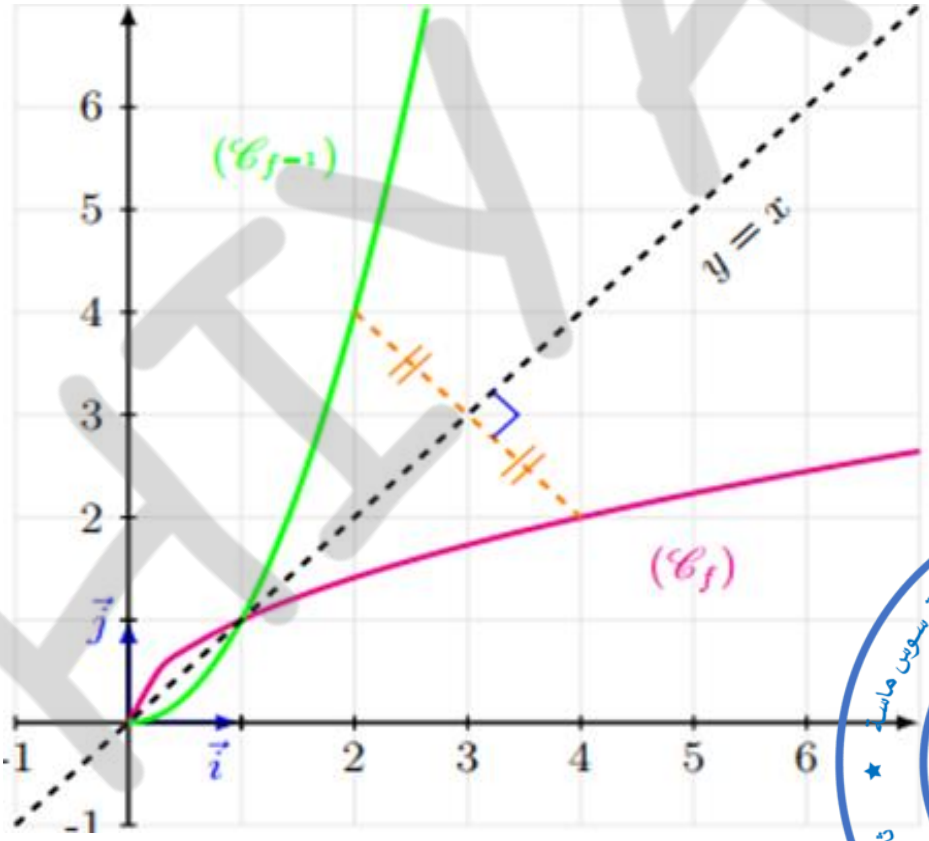
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et f^{-1} sa fonction réciproque, alors :

- f^{-1} est continue sur l'intervalle $J=f(I)$.
- f^{-1} est strictement monotone sur $J=f(I)$,
- La monotonie de f^{-1} sur $J=f(I)$ est la même monotonie de f sur I
- La courbe $\left(\mathcal{C}_{f^{-1}}\right)$ de la fonction f^{-1} est le symétrique de la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ de la fonction f par rapport à la droite $y=x$

  $*(\forall x \in I);\left(f^{-1}of\right)(x)=x$; $*(\forall x \in J);\left(fof^{-1}\right)(x)=x$ $*f^{-1}(J)=I$
- $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

Exemple 14 :

Traçons les courbes $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et $\left(\mathcal{C}_{f^{-1}}\right)$ de l'exemple précédent dans un repère orthonormé :



Application 11

On considère la fonction f définie sur $I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ par : $f(x)=2x^2-x+1$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur intervalle J à déterminer.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f^{-1}

3) Tracer les courbes $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et $\left(\mathcal{C}_{f^{-1}}\right)$ dans un même repère orthonormé.

Remarque 7 :

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition. I un intervalle de D_f

La fonction g définie sur I par $g(x)=f(x)$ est appelée la restriction de f sur I

HLAB
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

6) Fonction racine nième - Puissance rationnelle d'un nombre réel

Activité 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur intervalle J à déterminer.

2) Déterminer l'expression de f^{-1}

Définition 6 : Fonction racine nième

Soit n un entier naturel non nul.

- La fonction réciproque de la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $x\mapsto x^n$ est appelée fonction racine $n^{\text{ième}}$ notée $\sqrt[n]{x}$.
- L'image d'un réel positif x par cette fonction est notée $\sqrt[n]{x}$
- Le nombre $\sqrt[n]{x}$ est appelé racine $n^{\text{ième}}$ du nombre x.

Remarques 8 :

Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ on a :

- $\sqrt[1]{x}=x$; $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$; $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$
- $\sqrt[3]{x}$ est appelée la racine cubique de x.

Propriétés 10 :

Soit n un entier naturel non nul alors :

- Pour tous $x;y\in\mathbb{R}^+$ on a : $\sqrt[n]{x}=y\Leftrightarrow x=y^n$; $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$; $\sqrt[n]{x}\le\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x\le y$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$
- La fonction $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

Exemple 15 :

$\bullet\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$; $\bullet\sqrt[5]{3}<\sqrt[3]{8}$ car $3<8$; $\bullet x^5=32\Leftrightarrow x=\sqrt[5]{32}=2$

Application 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\bullet x^8-25=0$; $\bullet x^4=16$; $\bullet x^7=3$; $\bullet x^6=-5$; $\bullet x^7=-5$; $\bullet(3x-4)^5=32$

Propriétés 11 :

Soient n et m deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}^+$. On a :

$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{\dfrac{1}{b}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq0)$; $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\ (b\neq0)$; $\sqrt[nm]{a^m}=\left(\sqrt[nm]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a}$; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

Exemple 16 :

1) Simplifier le nombre $A=\sqrt{\sqrt{3}+2\sqrt[4]{81}-\sqrt[4]{243}}$

2) Comparer les nombres suivants : $a=\sqrt[5]{3}$ et $b=\sqrt[7]{2}$

Remarques 9 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et u une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$

• L'ensemble de définition de la fonction $f:x\mapsto\sqrt[n]{u(x)}$ est $D_f=\{x\in\mathbb{R}/u(x)\ge0\}$

• Pour résoudre une équation ou inéquation contenant des racines nièmes on détermine premièrement D l'ensemble de définition (de l'équation ou de l'inéquation).

Application 13

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt[3]{4-x}=2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt[3]{3x-1}<2$

3) Calculer la limite $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}$

Exercice 6

1) Simplifier les nombres suivants : $A=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}\times\sqrt{\sqrt{81}}}{\sqrt[3]{3^{17}}}$; $B=\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{\sqrt{y^{-5}}}}\times\sqrt[12]{\dfrac{x^{-8}}{y^3}}$

2) Ordonner dans l'ordre croissant les nombres : $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\sqrt{5}}$; $\sqrt[4]{7}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x^4-5x^2-24=0$; $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$; $5x-4\sqrt[3]{x}-1=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $\sqrt{2x+1}<3+\sqrt{x+2}$; $\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}>6$; $16x^4<25$

Propriétés 12 :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I

- Si u est continue et positive sur l'intervalle I, alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est continue sur l'intervalle I.
- Si $\lim u(x)=l \quad (l\geq 0)$, alors $\lim \sqrt[n]{u(x)}=\sqrt[n]{l}$.
- Si $\lim u(x)=+\infty$, alors $\lim \sqrt[n]{u(x)}=+\infty$.

Application 14

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt[3]{3x^2+4}$.

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-2x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-x\right)$

Définition 7 : Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif

Soient $x\in\mathbb{R}^+$ et r un nombre rationnel non nul. On appelle puissance rationnelle du nombre x d'exposant r le nombre noté x^r, définie par : $x^r=\sqrt[n]{x^m}$ où $r=\dfrac{m}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $m\in\mathbb{Z}^*$.

Exemple 17 :

$\bullet 5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^2}$; $\bullet 7^{\frac{5}{2}}=\sqrt{7^5}$; $\bullet \sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}$; $\bullet 3^{-\frac{8}{5}}=\sqrt[5]{3^{-8}}=\sqrt[5]{\dfrac{1}{3^8}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^8}}$

Propriétés 13 :

Pour tout x et y de $\mathbb{R}^{*+}$ et pour tout r et r' de $\mathbb{Q}^*$, on a :

$\bullet x^r x^{r'}=x^{r+r'}$; $\bullet \dfrac{x^r}{x^{r'}}=x^{(r-r')}$; $\bullet (x^r)^{r'}=x^{rr'}$; $\bullet x^{-r}=\dfrac{1}{x^r}$; $\bullet x^r y^r=(xy)^r$; $\bullet \dfrac{x^r}{y^r}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^r$

Application 15 :

Simplifier les nombres suivants : $A=(27)^{\frac{2}{3}}+(16)^{\frac{3}{4}}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{8^{-2}}}+\dfrac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}}$; $B=\dfrac{(81)^{\frac{2}{9}}\times(27)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{14}{3}}}$

HTYAB

Résumé 1 : Continuité

1) Continuité en un point :

f est **continue en** $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2) Continuité à droite - Continuité à gauche :

f est **continue à droite en** $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en x_0.

3) Continuité sur un intervalle :

- On dit qu'une fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, si elle est continue en tout élément de cet intervalle.
- On dit qu'une fonction f est continue sur le segment $[a;b]$, si elle est continue sur l'intervalle $]a;b[$ et continue à droite en a et à gauche en b
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x\mapsto sin(x)$, $x\mapsto cos(x)$ et $x\mapsto|x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$
- La fonction $x\mapsto tan(x)$ est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

4) Opérations sur les fonctions continues :

1) Si u et v sont continues sur un intervalle I.
Alors les fonctions $u\pm v$, $u\times v$, $\alpha\times u$, $|u|$ et u^n sont continues sur I . $(\alpha\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*)$

2) Si u est continue sur I et $(\forall x\in I)\ u(x)\neq 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est continue sur I.

3) Si u et v sont continues sur I et $(\forall x\in I)\ v(x)\neq 0$, alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est continue sur I.

4) Si u est continue sur I et $(\forall x\in I)\ u(x)\geq 0$, alors la fonction $x\mapsto\sqrt{u(x)}$ est continue sur I.

5) Si u est continue sur l'intervalle I et si v est continue sur un intervalle J et $u(I)\subset J$.

Alors la fonction $f=vou$ est continue sur l'intervalle I.

- $\begin{cases}\lim(u(x))=l\\ v\ \ est\ continue\ en\ l\end{cases}\Rightarrow\lim(vou(x))=v(l)$

5) L'image d'un intervalle :

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment
- Si f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors :
  $f([a;b])=[m;M]$ tel que :
  $m=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M=\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$
- Si f est une fonction continue sur I, alors :

L'intervalle I	$f(I)$	
	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
$I=[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$I=[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$I=]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$I=]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$

6) Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème :

$\begin{cases}f\ est\ continue\ sur\ [a;b]\\ k\ est\ compris\ entre\ f(a)\ et\ f(b)\end{cases}\Rightarrow$ L'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$

Si de plus f est strictement monotone sur $[a;b]$, alors cette solution est unique.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$

$\begin{cases}f\ est\ continue\ sur\ [a;b]\\ f(a)\times f(b)<0\end{cases}\Rightarrow$ L'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[a;b]$ (et dans $]a;b[$)

Si de plus f est strictement monotone sur $[a;b]$, alors cette solution est unique.

Propriété :

Si f est continue sur un intervalle I.

Alors pour tout réel $k\in f(I)$ l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans I.

Si de plus f est strictement monotone sur I, alors cette solution est unique.

7) Fonction réciproque :

Propriété 7 :

$\begin{cases}f\ est\ continue\ sur\ I\\ f\ est\ strictement\ monotone\ sur\ I\end{cases}\Rightarrow f$ admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J=f(I)$

Remarque :

Pour déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$, on résout l'équation $f(y)=x$ d'inconnue $y \in I$

Et on a $f(y)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=y$

Les propriétés de la fonction réciproque :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , et f^{-1} sa fonction réciproque, alors :

- f^{-1} est continue sur l'intervalle $J=f(I)$.
- f^{-1} est strictement monotone sur $J=f(I)$,
- La monotonie de f^{-1} sur $J=f(I)$ est la même monotonie de f sur I
- La courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} est le symétrique de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f par rapport à la droite $y=x$
- $(\forall x \in I);(f^{-1}of)(x)=x$ • $(\forall x \in J);(fof^{-1})(x)=x$
- $f^{-1}(J)=I$
- $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)$

8) Fonction racine nième :

Définition :

Soit n un entier naturel non nul.

- La fonction réciproque de la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $x \mapsto x^n$ est appelée fonction racine n^{ième} notée $\sqrt[n]{x}$.
- L'image d'un réel positif x par cette fonction est notée $\sqrt[n]{x}$
- Le nombre $\sqrt[n]{x}$ est appelé racine n^{ième} du nombre x.

Propriétés :

- $\sqrt[n]{x}=y \Leftrightarrow x=y^n$
- $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x=y$
- $\sqrt[n]{x} \le \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \le y$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x}=+\infty$

Propriétés :

$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; $\sqrt[nm]{a^m}=\sqrt[n]{a}$; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

Propriétés :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I

- Si u est continue et positive sur l'intervalle I , alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est continue sur l'intervalle I .
- Si $\lim u(x)=l \quad (l \ge 0)$, alors $\lim \sqrt[n]{u(x)}=\sqrt[n]{l}$.
- Si $\lim u(x)=+\infty$, alors $\lim \sqrt[n]{u(x)}=+\infty$.

Remarque :

Soit u une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$

- L'ensemble de définition de la fonction :

$f: x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est $D_f=\{x \in \mathbb{R} / u(x) \ge 0\}$

- Pour résoudre une équation ou inéquation contenant des racines nièmes on détermine premièrement son ensemble de définition.

9) Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif :

Définition :

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et r un nombre rationnel non nul. On appelle puissance rationnelle du nombre x d'exposant r le nombre noté x^r, définie par : $x^r=\sqrt[n]{x^m}$ où $r=\frac{m}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}^*$.

Propriétés :

Pour tout x et y de $\mathbb{R}^{*+}$ et pour tout r et r' de $\mathbb{Q}^*$.

On a :

$x^r x^{r'}=x^{r+r'}$; $\frac{x^r}{x^{r'}}=x^{(r-r')}$; $(x^r)^{r'}=x^{rr'}$;

$x^{-r}=\frac{1}{x^r}$; $x^r y^r=(xy)^r$; $\frac{x^r}{y^r}=\left(\frac{x}{y}\right)^r$

HIYAB

Exercice 1 : Continuité en un point

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x-2} & ; \quad x\neq 2 \\ f(2)=5 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 2

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{ax} ; x\neq 0 \\ f(0)=4 \end{cases}$$

Déterminer a sachant que f est continue en 0

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{|x-2|} \\ f(2)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 2

Exercice 4

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2-3x & ; x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{3x^2-5}{2x-1} & ; x>1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 1

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+2 & ; \quad x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{ax-2}{2(x-2)} & ; \quad x>1 \end{cases}$$

Déterminer a sachant que f est continue en 1

Exercice 6 :

Déterminer a sachant que f est continue en x_0 dans les cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{4x^2-3x-27}{x-3} \\ f(3)=a \end{cases}$; $x_0=3$

2) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} \\ f(1)=a \end{cases}$; $x_0=1$

3) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2tan(x)+sin(x)}{x} \\ f(0)=a \end{cases}$; $x_0=0$

4) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{sin(x)}{\sqrt[3]{x+1}-1} \\ f(0)=a \end{cases}$; $x_0=0$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x-a & ; x<2 \\ f(x)=\dfrac{2x^2-a+b}{x} & ; x\geq 2 \end{cases}$$

Déterminer une relation entre a et b sachant que f est continue en 2

Exercice 8 : Continuité sur un intervalle

Etudier la continuité de la fonction f sur I dans les cas suivants :

1) $f(x)=2x-1+sin(x)$ et $I=\mathbb{R}$
2) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$ et $I=]0;+\infty[$
3) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}$ et $I=]-2;+\infty[$
4) $f(x)=x.sin(x)$ et $I=]0;\pi]$
5) $f(x)=(x^2+1)(x^4+x)$ et $I=\mathbb{R}$
6) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ et $I=\mathbb{R}$
7) $f(x)=\sqrt{1-9x^2}$ et $I=\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right]$
8) $f(x)=cos(3x^2+2x-1)$ et $I=\mathbb{R}$
9) $f(x)=sin(2x^3+1)$ et $I=\mathbb{R}$

Correction

Exercice 9 :

Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants :

1) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+1} & ; x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & ; x>1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{x-2} & ; x\geq 2 \\ f(x)=\dfrac{3}{3-x} & ; x<2 \end{cases}$

Exercice 10 : Image d'un intervalle

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ et $I=[-1;1]$
2) $f(x)=x+1$ et $I=[0;+\infty[$
3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ et $I=]-\infty;-3]$
4) $f(x)=x^2$ et $I=[-1;2]$
5) $\begin{cases} f(x)=2x-4 & ; x\in]0;2[\\ f(x)=-2x+4 & ; x\in [2;3[\end{cases}$ et $I=]0;3[$

Exercice 11 : Théorème des valeurs intermédiaires

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans I dans les cas suivants :

1) $f(x)=7x^3-x-1$ et $I=[0;1]$

2) $f(x)=x^3-2x^2+x+2$ et $I=]-1;0[$

3) $f(x)=cos(x)-x$ et $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 12 :

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans I dans les cas suivants :

1) $f(x)=2x^3+5x-4$ et $I=[0;1]$

2) $f(x)=x+tan(x)-1$ et $I=\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

3) $f(x)=x^5+x^3+x+2$ et $I=[-1;0]$

4) $f(x)=x^3+2x-4$ et $I=\left]1,\frac{3}{2}\right[$

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x+1$

1) Dresser le tableau de variations de f

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[-2;2]$

3) En utilisant la dichotomie donner un encadrement de α d'amplitude 1

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3-3x^2-1$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α tel que $1<\alpha<2$

2) Donner un encadrement de α d'amplitude $0,25$

3) Résoudre dans $[1;2]$ l'inéquation $f(x)\geq 0$

Exercice 15 :

1) Montrer que l'équation $x^3-6x^2+6=0$ admet au moins une solution $\alpha\in]1;2[$ puis donner un encadrement de α d'amplitude $0,5$

2) Montrer que l'équation $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{3}$ admet au moins une solution dans $[1,2]$

Exercice 16 :

1) Etudier les variations de la fonction $f(x)=x^3+3x-8$

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

3) Vérifier que $1<\alpha<2$ puis donner un encadrement de α d'amplitude $0,25$

4) Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 17 : Fonction réciproque

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur intervalle J à préciser puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{3x+1}{x+2}$ et $I=]-\infty;-2[$

2) $f(x)=x^2-4x+2$ et $I=[2;4]$

3) $f(x)=-2(x-1)^2+5$ et $I=[1;+\infty[$

4) $f(x)=\sqrt{x+1}+x$ et $I=[1;+\infty[$

5) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ et $I=[-1;1]$

6) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-3$ et $I=[-1;+\infty[$

7) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ et $I=[0;1[$

8) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ et $I=\mathbb{R}$

Correction

Exercice 18 : Fonction racine nième

1) Comparer les nombres :

$a=\left(\sqrt[4]{8}\right)^2$, $b=\sqrt{\sqrt{81}}$ et $c=\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

2) Simplifier le nombre $A=\frac{2^{\frac{5}{3}}\times\sqrt[4]{2^{-8}}\times\left(\sqrt[5]{3^4}\right)^{-\frac{1}{2}}}{3^{\frac{5}{2}}\times\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}}}$

3) Ordonner dans l'ordre croissant les nombres :

$\sqrt[12]{100}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt[6]{80}$; $\sqrt[4]{15}$; $\sqrt[3]{28}$

4) Rendre rationnel le dénominateur des nombres suivants :

$a)\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$; $b)\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$; $c)\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$; $d)\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$

Exercice 19 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$	2) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$	4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{2x}-2}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x}-2x$	6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{3x^2-5x+7}$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$
9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$	10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x+1}$
11) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$	12) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{\sqrt{4x-3}-3}$
13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}}$	14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4+x}-\sqrt[4]{x^4-x}$
15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$	16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{x}$

Exercice 20 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$(E_1):(x-4)^3+1=0$; $(E_2):\left(x^2+1\right)^5=32$; $(E_5):x+\sqrt[3]{x}=30$

$(E_3):\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}$; $(E_4):\ \left(\sqrt[3]{x}\right)^2-7\sqrt[3]{x}+6=0$

$(E_6):\sqrt[3]{x^2-9x}=-2$; $(E_7):x+2>\sqrt[3]{x^2+8}$; $(E_8):\sqrt{x+3}\leq x$

02
Dérivation

HIYAB

1) Rappel

1) Dérivabilité en un point et interprétation graphique :

Limite	Dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable en a et $f'(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à droite en a et $f'_d(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$; $x\geq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à gauche en a et $f'_g(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$; $x\leq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$	f n'est pas dérivable en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a
f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est à la fois dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$		

2) Les méthodes de calcul du nombre dérivé :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a\in I$

Il existe 3 méthodes pour calculer $f'(a)$

Méthode 1 : Si on a calculé $f'(x)$ pour tout $x\in I$, on remplace x par a dans l'expression de $f'(x)$

Méthode 2 : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Méthode 3 : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a :

Si $A(x_A;y_A)\in(T)$ et $B(x_B;y_B)\in(T)$, alors $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

3) Approximation affine :

Soit f une fonction dérivable en a.

- La fonction g tel que $g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a.
- Pour tout réel h voisin de a on a : $f(h)\simeq g(h)$

2) Dérivabilité et continuité

Propriétés :

- Si f est une fonction dérivable en a alors f est continue en a.
- Si f est une fonction qui n'est pas continue en a alors elle n'est pas dérivable en a.
- Une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point.

Exemple 1 :

Montrer que la fonction f tel que $f(x)=|x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exemple 2 :

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^3$ et $a=2$.

2) $\begin{cases} f(x)=x-4 & si \quad x\geq 3 \\ f(x)=x^2-3 & si \quad x<3 \end{cases}$ et $a=3$.

3) $f(x)=|x-1|$ et $a=1$.

Exemple 3 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=(1+x)^2$.

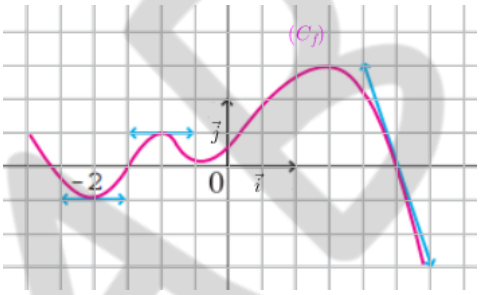
1) Montrer que f est dérivable en $a=0$.

2) Donner l'approximation affine de f au voisinage de zéro.

3) En déduire une valeur approchée de nombre : $(1.0001)^2$. (Remarquer que $(1.0001)^2=f(0.0001)$)

Exemple 4 :

Soit f la fonction représentée graphiquement ci-contre.



1) Déterminer : $f\left(\frac{5}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{5}{2}\right)$.

2) En déduire une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{5}{2}$.

Exemple 5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{1+x}$.

Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $a=3$.

3) Dérivabilité sur un intervalle – fonction dérivée

1) Dérivabilité sur un intervalle :

Soit f une fonction numérique.

- On dit que f est dérivable sur un intervalle $]a,b[$ lorsque f est dérivable en tout réel de $]a,b[$.
- On dit que f est dérivable sur $[a,b[$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à droite en a .
- On dit que f est dérivable sur $]a,b]$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à gauche en b .
- On dit que f est dérivable sur $[a,b]$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b .

(a et b peuvent être finis ou infinis).

2) Fonction dérivée :

- Si f est dérivable sur un intervalle I , alors la fonction qui à chaque réel x de I associe $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f on la note par f'.
- Si f est dérivable sur un intervalle I , alors elle-est dérivable sur chaque intervalle inclus dans I .
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I .

3) Fonction dérivée des fonctions usuelles :

a, b et c des nombres réels et $n\in\mathbb{N}^*$.

$f(x)$	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$	Ecriture mathématique
c	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$(c)'=0$
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a	$(ax+b)'=a$
x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$(x^n)'=nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-sin(x)$	$(cos(x))' = -sin(x)$
$sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$cos(x)$	$(sin(x))' = cos(x)$
$tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\right\}$	Tout intervalle de type : $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ tel que $k \in \mathbb{Z}$	$1+tan^2\ (x)$	$(tan(x))' = 1+tan^2(x)$
$cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-a \times sin(ax+b)$	$(cos(ax+b))' = -a \times sin(ax+b)$
$sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a \times cos(ax+b)$	$(sin(ax+b))' = a \times cos(ax+b)$

4) Opérations sur les fonctions dérivées :

- u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et soit α un réel fixé et $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonction	Fonction dérivée	Conditions	Ecriture mathématique :
$u+v$	$u'+v'$		$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$		$(u(x) \times v(x))' = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$\alpha \times u$	$\alpha \times u'$		$(\alpha \times u(x))' = \alpha \times u'(x)$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$(\forall x \in I) \quad u(x) \neq 0$	$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$(\forall x \in I) \quad v(x) \neq 0$	$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\forall x \in I) \quad u(x) > 0$	$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$		$\left(u^n(x)\right)' = n \times u'(x) \times u^{n-1}(x)$

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle (quotient de polynômes) est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
- Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I, alors on écrit : $(\forall x \in I) \quad f'(x) = (f(x))'$.

5) Dérivées successives – écriture différentielle :

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

* La dérivé f' de f est appelée la dérivée première de f.

* Si la fonction f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée $f^{(2)}$ ou f''

* Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ (avec $n \geq 3$)est dérivable sur I, sa fonction est appelée dérivée $n^{ème}$ de f et notée $f^{(n)}$.

* La dérivée $n^{ème}$ de f est aussi appelée dérivée d'ordre n de f.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si $y = f(x)$, alors on écrit $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ou $dy = f'(x)dx$. Cette écriture est appelée : écriture différentielle.

Exemple 6 :

Dans chacun des cas suivants étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I et définir sa fonction dérivée :

1) $f(x)=\sqrt{x}+x^5$ et $I=]0;+\infty[$. ; 2) $f(x)=(5x+2)cos(x)$ et $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\dfrac{3}{x}$ et $I=]-\infty;0[$. ; 4) $f(x)=(2x-3)^8$ et $I=\mathbb{R}$.

5) $f(x)=x^{-7}$ et $I=[4;+\infty[$. ; 6) $f(x)=\sqrt{x.sin(x)}$ et $I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exemple 7 :

a, b, c et d des nombres réels tels que $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$. Montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\right)\ \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

Exemple 8 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2-4 & si\ \ x\leq 2\\ f(x)=8-\dfrac{16}{x} & si\ \ x>2\end{cases}$

1) Montrer que f est dérivable sur les intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x<2$ et pour $x>2$.

2) Etudier la dérivabilité de f en $a=2$.

3) La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exemple 9 :

En utilisant le nombre dérivé calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{20}-2^{20}}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

4) Applications de la fonction dérivée

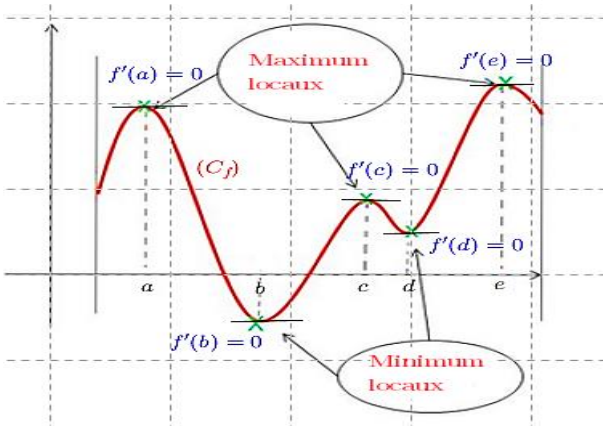
1) Dérivée et sens de variations :

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .
  - * f est croissante sur I si et seulement si $f'(x)\geq 0$ pour tout x de I .
  - * f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x)\leq 0$ pour tout x de I .
  - * f est constante sur I si et seulement si $f'(x)=0$ pour tout x de I .
- Si f est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini ou infini de points isolés, alors f est strictement croissante sur I
- Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini ou infini de points isolés, alors f est strictement décroissante sur I .

2) Dérivée et extremums :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$

- Si f admet un extremum (minimum ou maximum) local en a , alors $f'(a)=0$
- Si f admet un extremum local en a , alors la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A\big(a,f(a)\big)$ est horizontale.



- Si $f'(a)=0$ et f' change de signe au voisinage de a, alors $f(a)$ est un extremum local de f.

➢ $f(a)$ est la valeur maximale de f sur un intervalle $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \leq f(a)$

➢ $f(a)$ est la valeur minimale de f sur un intervalle $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \geq f(a)$

Exemple 10 :

On considère la fonction f définie sur par $f(x)=x^3$.

1) Montrer qu'il existe un réel a tel que $f'(a)=0$.

2) La fonction f admet-il un extremum en a ?

Exemple 11 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2-2x+5$.

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f.

2) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \geq 4$.

5) Dérivée d'une fonction composée

Propriétés :

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J avec $u(I) \subset J$ Soit a un réel de I.

➢ Si u est dérivable en a et v est dérivable en $u(a)$, alors la fonction vou est dérivable en a et de plus $(vou)'(a)=v'(u(a))\times u'(a)$

➢ Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur l'intervalle $u(I)$, alors vou est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $(vou)'(x)=v'(u(x))\times u'(x)$

Exemple 12 :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.

1) En écrivant la fonction u^n comme composée de deux fonctions, démontrer que : $(u^n)'=n\times u'\times u^{n-1}$.

2) On suppose que u est strictement positive sur I

En écrivant la fonction $\sqrt{u}$ comme composée de deux fonctions, démontrer que : $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exemple 13 :

Soit u et v les fonctions définies par : $u(x)=tan(x)$ et $v(x)=x^2$

Montrer que la fonction vou est dérivable en $a=\dfrac{\pi}{4}$

Exemple 14 :

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer les fonctions u et v tel que $f=vou$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.

1) $f(x)=sin(2x-\dfrac{\pi}{5})$ et $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ et $I=]1;+\infty[$.

6) Dérivée de la fonction réciproque

Propriété : Dérivée de la fonction réciproque en un point :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a \in I$

Si f est dérivable en a et $f'(a)\neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et on a : $\left(f^{-1}\right)'(f(a))=\dfrac{1}{f'(a)}$

Exemple 15 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=sin(x)$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Calculer $f(\frac{\pi}{3})$ et $f'(\frac{\pi}{3})$ puis montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Calculer $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Propriété : Dérivée de la fonction réciproque sur un intervalle :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Si f est dérivable sur I telle que la fonction f' ne s'annule pas sur I , alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J=f(I)$ et on a : $(\forall x\in J)\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Exemple 16 :

Soit la fonction f définie sur $[-2;+\infty[$ par $f(x)=x^2+4x+5$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[1;+\infty[$.

2) Déterminer l'intervalle J' sur lequel f^{-1} est dérivable et calculer $(f^{-1})'(x)$.

Propriété : Dérivée de la fonction racine $n^{éme}$:

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- La fonction $x\mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ \left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $x\mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x\in I)\ \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

Exemple 17 :

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la fonction f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$.

1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ et $I=]0;+\infty[$.

2) $f(x)=\sqrt[5]{(x^2-9)^2}$ et $I=]3;+\infty[$.

Propriété : Dérivée de la fonction $x\mapsto x^r$:

Soit r un nombre rationnel non nul.

- La fonction $x\mapsto x^r$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ \left(x^r\right)'=r.x^{r-1}$
- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $x\mapsto (u(x))^r$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x\in I)\ \left((u(x))^r\right)'=r\times(u(x))^{r-1}\times u'(x)$

Résumé 2 : Dérivation

Dérivabilité en un point et interprétation graphique :

Limite	Dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable en a et $f'(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à droite en a et $f'_d(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$; $x\geq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à gauche en a et $f'_g(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$; $x\leq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$	f n'est pas dérivable en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a
f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est à la fois dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$		

Fonction dérivée des fonctions usuelles - Opérations sur les fonctions dérivée :

$(c)'=0$ $(ax)'=a$ $(ax+b)'=a$ $(x)'=1$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $\left(x^r\right)'=r.x^{r-1}$ $\left(u^r\right)'=r\times u^{r-1}\times u'$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u+v)'=u'+v'$ $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ $(\alpha\times u)'=\alpha\times u'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$(cos(x))'=-sin(x)$		$(sin(x))'=cos(x)$		$(tan(x))'=1+tan^2(x)$	

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Les méthodes de calcul du nombre dérivé :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a\in I$

Il existe 3 méthodes pour calculer $f'(a)$

Méthode 1 : Si on a calculé $f'(x)$ pour tout $x\in I$, on remplace x par a dans l'expression de $f'(x)$

Méthode 2 : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Méthode 3 : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a :

Si $A(x_A;y_A)\in(T)$ et $B(x_B;y_B)\in(T)$, alors $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Dérivabilité et continuité :

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I.

Dérivée et sens de variation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f'(x) \leq 0$ f est constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f'(x) = 0$

Dérivée et extremums :

f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

- f admet un maximum local en a si, et seulement s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que : $(\forall x \in J) \quad f(x) \leq f(a)$.
- f admet un minimum local en a si, et seulement s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que : $(\forall x \in J) \quad f(x) \geq f(a)$.
- Si f admet un extremum (minimum ou maximum) local en a, alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe a, alors la fonction f admet un extremum local en a.

Approximation affine :

Soit f une fonction dérivable en a.

- La fonction g tel que $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a.
- Pour tout réel h voisin de a on a : $f(h) \simeq g(h)$

Dérivée d'une fonction composée :

- $\begin{cases} u \text{ est dérivable en } a \\ v \text{ est dérivable en } u(a) \end{cases} \Rightarrow vou$ est dérivable en a

  $(vou)'(a) = v'(u(a)) \times u'(a)$
- $\begin{cases} u \text{ est dérivable sur } I \\ v \text{ est dérivable sur } u(I) \end{cases} \Rightarrow vou$ est dérivable sur I

  Pour tout $x \in I$: $(vou)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

Dérivée de la fonction réciproque :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a \in I$.

- $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$
- $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$
- $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ (\forall x \in I) \quad f'(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ est dérivable sur $J = f(I)$
- $(\forall x \in J) \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

HTYAB

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=3-3x-x^3 & si\ x\in]-\infty,1[\\ f(x)=\sqrt{x^2-1}-1 & si\ x\in [1,+\infty[\end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f en 1.
2) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1. Puis Interpréter graphiquement les résultats.
3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]-\infty,1[$.
4) Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-\infty,1[$ et que $0<\alpha<1$.
6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty,1[$, montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on précisera.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x-4\sqrt{x}+3$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Montrer que l'équation $f(x)=x^2$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$.
3) Soit g la restriction de f sur $I=]4;+\infty[$
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser son domaine de définition J.
   b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x\in J$.

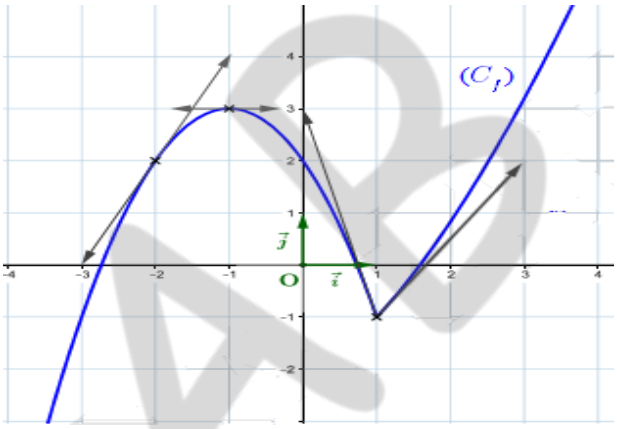
Exercice 3

Soient f une fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=2\sqrt{x-1}-x$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3) Etudier la continuité de la fonction f sur D_f.
4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
5) Montrer que $f'(x)=\dfrac{2-x}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$ pour tout $x\in]1;+\infty[$, puis déduire les variations de f.
6) Soit g la restriction de f sur $I=[2;+\infty[$.
   a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
   b) Donner les variations de g^{-1} sur l'intervalle J.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $g^{-1}(x)=5$.
   d) Déterminer $g^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout x de l'intervalle J.

Exercice 4

Dans la figure ci-après $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

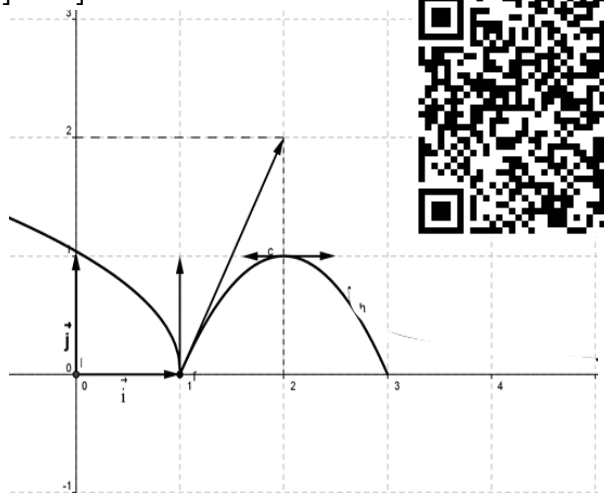


1) Déterminer $f(-2)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$
2) Déterminer graphiquement $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$
3) En déduire que f n'est pas dérivable en 1.
4) Dresser le tableau de variations de f sur $[-3;3]$ (on donne $f(3)=\dfrac{25}{8}$)
5) En déduire le tableau de signe de f' sur $[-3;3]$

Exercice 5

La courbe si dessous et celle d'une fonction f définie sur $]-\infty;3]$.

Correction



1) Déterminer $f'(2)$, (justifier)
2) Donner $f_d'(1)$, justifier.
3) f est–elle dérivable à gauche en 1, justifier ?
4) Déterminer $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}$.
5) Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty;3]$.

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL1

2BACSPF-2BACSVT
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3-54=0$; $\sqrt[3]{x^2+8}-2<x$

2) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-3x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$

3) Comparer les nombres $\sqrt[5]{4}$ et $\sqrt[3]{5}$

4) Ordonner dans l'ordre croissant les nombres : $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[6]{5}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt{2}$

Correction

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x^2-1+\sqrt{x^2+x}$.

1) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[-1;+\infty[$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0;+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in]0;1[$

b) Vérifier que $\sqrt{\alpha^2+\alpha}=1-\alpha^2$

5) Donner le sens de variation de f^{-1} .

6) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[-1;+\infty[$.

Exercice 3

I. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x+3$

1) a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction f .

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-2<\alpha<-1$

b) Vérifier que $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{15}{8}$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude $\dfrac{1}{2}$

c) Vérifier que $\alpha=-\sqrt[3]{\alpha+3}$

3) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II. On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+3x$

1) a) Etudier les variations de g

b) Dresser le tableau de variations de la fonction g

2) a) Montrer que $g(\alpha)=\dfrac{\alpha(\alpha+9)}{4}$

b) Déterminer le signe de $g(\alpha)$

c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $g(x)=0$

HIYAB

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS1

2BACSPF-A
2heures
Aissa HIYAB

Exercice 1 (5pts)

1) Comparer les nombres $\sqrt[4]{3}$ et $\sqrt[5]{2}$ 1pt

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : (E_1): $\sqrt[3]{x^2+1}=2$ et (E_2): $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-3\sqrt[3]{x}+2=0$ 2pt

3) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ 1pt

4) Simplifier le nombre : $\dfrac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\sqrt[5]{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{6}}$ 1pt

Exercice 2 (6pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^3-4x+2$

1) Dresser le tableau de variations de f 1pt

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ 1pt

3) Vérifier que $\alpha\in]0;1[$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,25$ 1pt

4) Vérifier que $\alpha^2+4=\dfrac{2}{\alpha}$ 1pt

5) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=-\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+2x+3$

Dresser le tableau de variations de g 2pt

Exercice 3 (9pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} & si\ \ x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2-x} & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 0,5pt

2) Etudier la continuité de f à gauche en 1 ..... 1pt

3) Montrer que f est dérivable à gauche en 1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu 1pt

4) a) Montrer que $\begin{cases} (\forall x\in]-\infty;1[) & f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} \\ (\forall x\in]1;+\infty[) & f'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \end{cases}$ 1.5pt

b) Etudier le signe de $f'(x)$ (étudier les cas $x>1$; $0\leq x<1$ et $x<0$) puis dresser le tableau de variations de f. 1.5pt

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse -1 ..... 1pt

5) Soit g la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par : $g(x)=f(x)$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. 1pt

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$ (remarquer que $0=f(-1)=g(-1)$) 0.5pt

c) Dresser le tableau de variations de g^{-1} 0.5pt

d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$ 0.5pt

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب
HIYAB

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS1

2BACSPF-B
2heures
Aissa HIYAB

Exercice 1 (5pts)

1) Simplifier le nombre : $\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt[5]{\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{4}}$ ……1pt

2) Comparer les nombres $\sqrt[4]{5}$ et $\sqrt[3]{2}$ ……1pt

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : (E_1): $\sqrt[3]{2+x^2}=3$ et (E_2): $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-5\sqrt[3]{x}+4=0$ ……2pt

4) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$ ……1pt

Exercice 2 (6pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+4x+2$

1) Dresser le tableau de variations de f ……1pt

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ ……1pt

3) Vérifier que $\alpha\in]-1;0[$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,25$ ……1pt

4) Vérifier que $\alpha^2+4=-\dfrac{2}{\alpha}$ ……1pt

5) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{1}{4}x^4+2x^2+2x+3$

Dresser le tableau de variations de g ……2pt

Exercice 3 (9pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-x} & si\ \ x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} & si\ \ x>0 \end{cases}$

1) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ……0,5pt

2) Etudier la continuité de f à droite en 0 ……1pt

3) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu ……1pt

4) a) Montrer que $\begin{cases} (\forall x\in]-\infty;0[) & f'(x)=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \\ (\forall x\in]0;+\infty[) & f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} \end{cases}$ ……1.5pt

b) Etudier le signe de $f'(x)$ (étudier les cas $x<0$ et $x>0$) et dresser le tableau de variations de f ……1.5pt

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1 ……1pt

5) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=f(x)$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. ……1pt

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$ (remarquer que $0=f(1)=g(1)$) ……0.5pt

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$ ……1pt

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول

03
Etude de fonctions

HIYAB

Dans tout ce chapitre f est une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Branches infinies d'une courbe

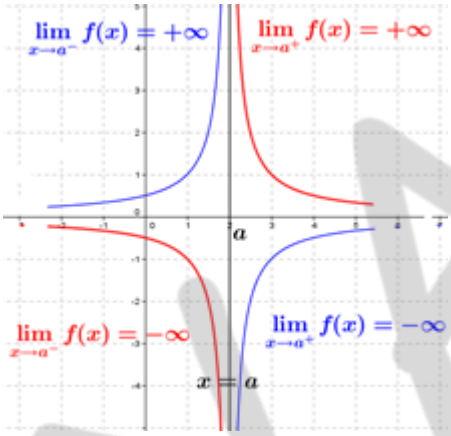
Définition 1 : Branches infinies

- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de $(\mathcal{C}_f)$ tend vers l'infini. (C'est à dire $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$, ou $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$)
- Généralement, les branches infinies décrivent le comportement de f aux bornes de D_f, c'est pour cette raison qu'on s'intéresse au calcul des limites aux bornes de D_f.
- Les branches infinies sont constituées de droites asymptotes et de branches paraboliques.

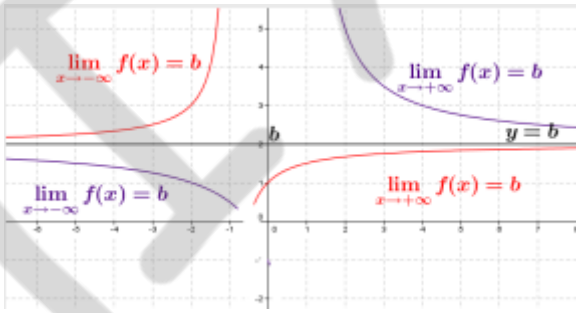
1-1 Asymptote horizontale - Asymptote verticale

Définitions 2 :

- Lorsque $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=a$



- Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$), on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. $-\infty$).



Exemple 1 :

1) Soit f une fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$;

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$ au voisinage de $+\infty$.

2) Soit g une fonction définie par $g(x)=\dfrac{-2}{x-1}$;

On a $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=-\infty$ alors $(\mathcal{C}_g)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

Application 1 :

1) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=3+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ puis interpréter les résultats graphiquement.

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $g(x)=\dfrac{x+5}{(x+2)^2}$

Calculer $\lim\limits_{x\to-2} g(x)$ puis interpréter le résultat graphiquement.

3) Soit f une fonction numérique définie par le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1

a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

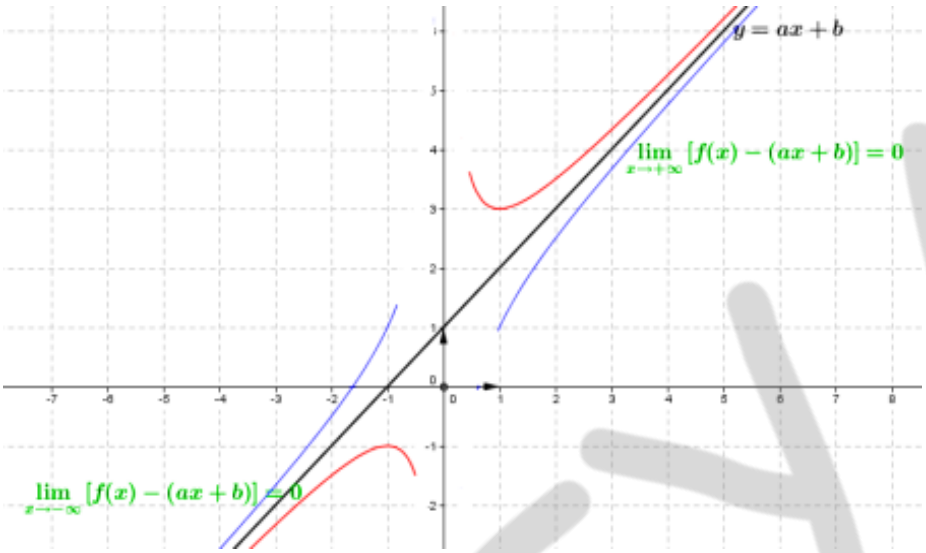
b) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter les résultats graphiquement.

1-2 Asymptote oblique

Définition 3 :

Soit f une fonction avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$) .

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$), on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



Exemple 2 :

Soit f une fonction définie par $f(x)=2x-3+\dfrac{3}{x^2}$.

Montrons que la droite d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(2x-3)\big)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(2x-3+\dfrac{3}{x^2}\right)-(2x-3)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$

Donc la droite d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

Propriété 1 :

Soit f une fonction avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$) .

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-ax=b$), alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).

Remarque 1 :

Cette propriété est utilisée lorsqu'on ne donne pas l'équation de l'asymptote oblique dans l'exercice.

Application 2

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$, en déterminant son équation.

2) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$.

ELYAB

Remarque 2 :

Les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D): $y=ax+b$ se déduit par l'étude de signe de $f(x)-(ax+b)$:

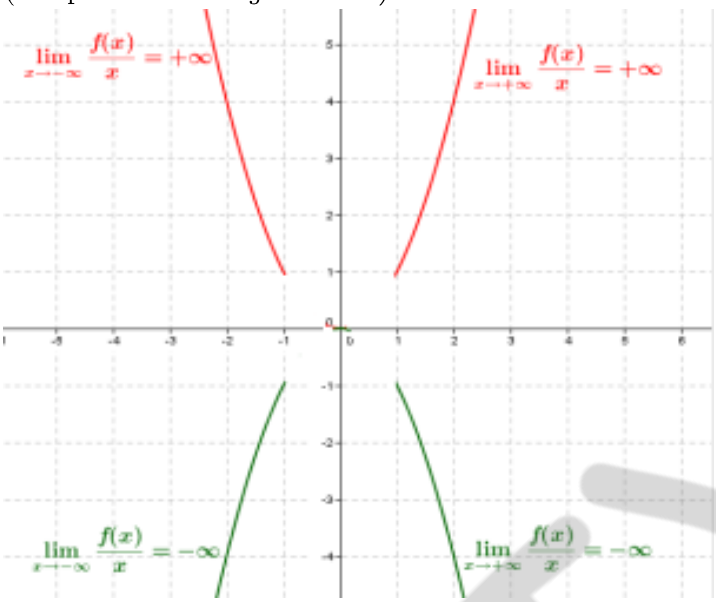
- Si $f(x)-(ax+b)>0$ pour tout $x\in I$, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur I.
- Si $f(x)-(ax+b)<0$ pour tout $x\in I$, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (D) sur I.
- Si $f(x)-(ax+b)=0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sont confondues aux points d'abscisses x .

1-3 Branches paraboliques

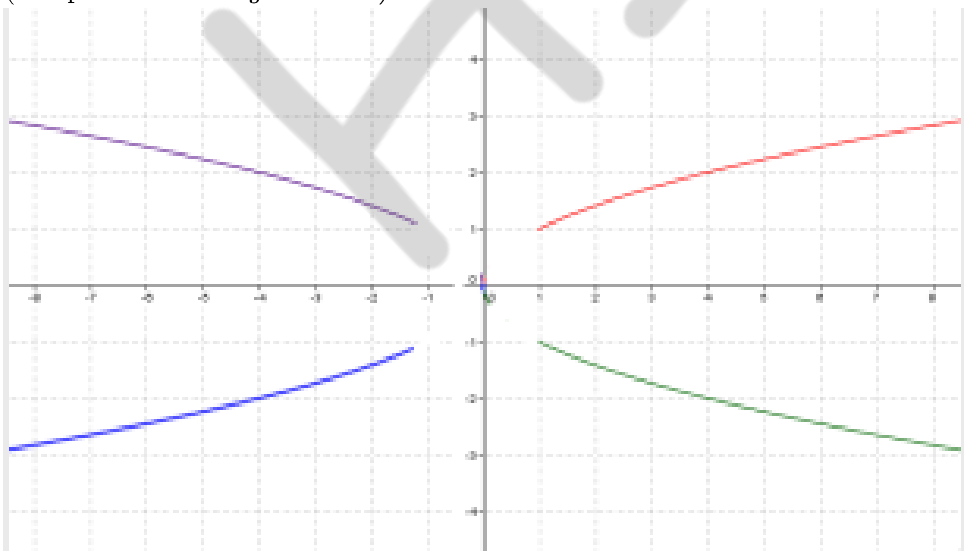
Définition 4 :

Soit f une fonction telle que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.

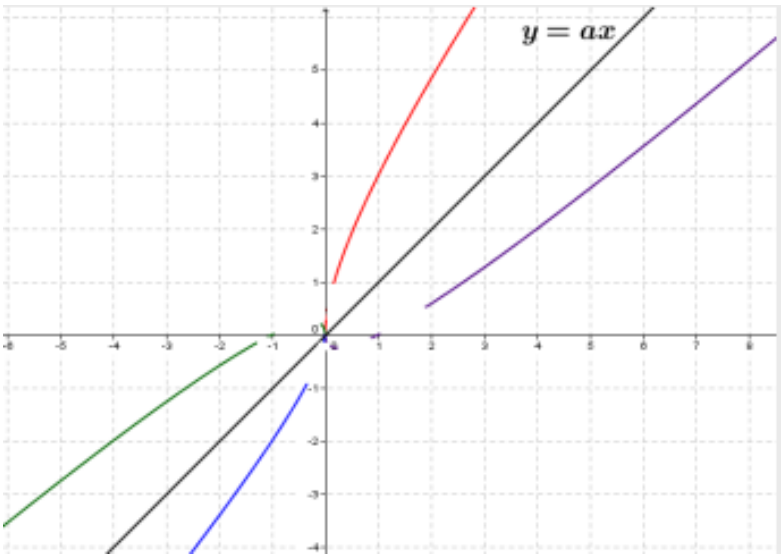
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (ou bien on dit que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (ou bien on dit que l'axe des abscisses est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-ax\big)=\pm\infty$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ (ou bien on dit que la droite d'équation $y=ax$ est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



Application 3

Etudier les branches paraboliques de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=2x^3-x$ 2) $f(x)=2x+3\sqrt{x}$ 3) $f(x)=\sqrt{3x+2}$

Remarques 3 :

- Quand on demande d'interpréter graphiquement les limites aux bornes du domaine de définition d'une fonction, ça veut dire donner les branches infinies (Asymptotes et branches paraboliques) éventuelles de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les équations des asymptotes et des directions asymptotiques et leurs voisinages.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ n'est pas suffisante pour affirmer qu'on a une branche parabolique mais il faut s'assurer d'abord qu'on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.

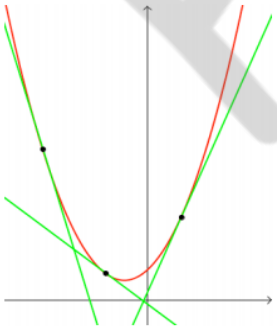
  Par exemple : La fonction $f(x)=\dfrac{sin(x)}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{sin(x)}{x^2}=0$, mais la fonction f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ car elle le coupe indéfiniment aux points d'abscisses $x_0=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}^*$.

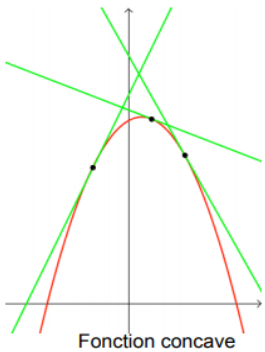
2) Concavité d'une courbe

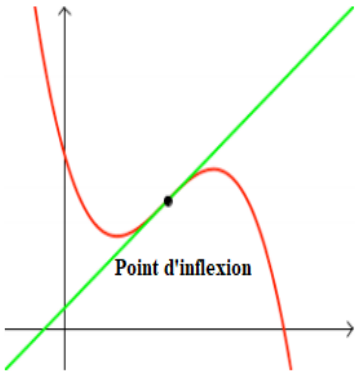
Définition 5 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur I, si $(\mathcal{C}_f)$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur I, si $(\mathcal{C}_f)$ est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- On appelle point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$, tout point où elle change de concavité.


Fonction convexe


Fonction concave



Propriété 2 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $a\in I$.

- $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur $I \Leftrightarrow (\forall x\in I)\ f''(x)\geq 0$
- $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur $I \Leftrightarrow (\forall x\in I)\ f''(x)\leq 0$
- $f''(a)=0$ et f'' change de signe au voisinage de $a \Rightarrow$ le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$

Exemple 3

Etudions la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+x+4$

On a $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=3x^2-6x+1$ donc $(\forall x\in\mathbb{R})\,;f''(x)=6x-6=6(x-1)$

On a $f''(x)=0\Leftrightarrow 6(x-1)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x-1		−	0	+	
$f''(x)$		−	0	+	
(C_f)		concave		convexe	

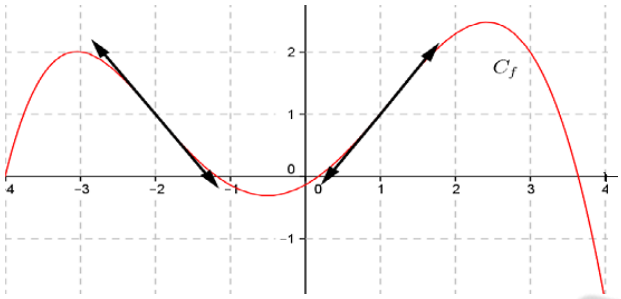
$f''(1)=0$ et f'' change de signe au voisinage de 1 donc le point $A(1;f(1)=3)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

Application 4 :

Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les points d'inflexion s'ils existent dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^3+3x+5$ 2) $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$

Application 5 : Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[-4;4]$



Propriétés 3 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $a\in I$.

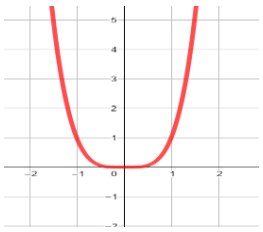
- f' change de monotonie au voisinage de a $\Rightarrow$ le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$
- $f'(a)=0$ et f' ne change pas de signe au voisinage de a $\Rightarrow$ le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$

Remarques 4 :

- $f''(a)=0$ ne suffit pas pour affirmer que le point d'abscisse a est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ mais il faut vérifier de plus si f'' change de signe au voisinage de a.

Par exemple : La fonction définie par $f(x)=x^4$,

On a $f''(0)=0$ mais la courbe $(\mathcal{C}_f)$ n'admet pas de point d'inflexion en $a=0$ comme l'indique le graphe ci-contre.



- Une fonction peut admettre plusieurs points d'inflexion.

Par exemple : La fonction f définie par $f(x)=x^4-2x^3$

On a $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$ donc on obtient le tableau de variations ci-dessous (facile à trouver) :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{27}{16}$	↗	$+\infty$

On a $\forall x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=(4x^3-6x^2)'=12x^2-12x=12x(x-1)$ donc on obtient le tableau de signe de f'' suivant (facile à trouver):

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	

On constate donc que $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion en $a=0$ et en $a=1$ et non pas un seul.

HILY AB

3) Eléments de symétrie d'une courbe

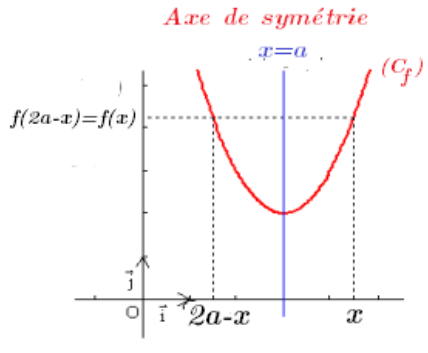
Propriété 4 :

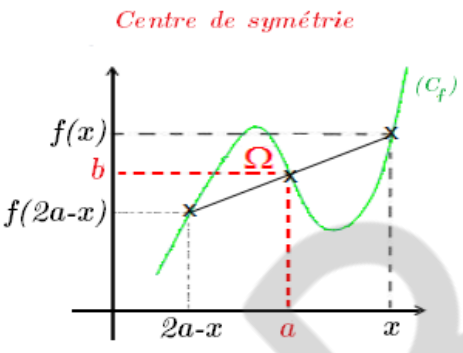
- Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$, si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, on a :

$$2a-x \in D_f \text{ et } f(2a-x)=2b-f(x)$$

- La droite (Δ) d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$, si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, on a :

$$2a-x \in D_f \text{ et } f(2a-x)=f(x)$$





Exemple 4 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Montrons que le point $\Omega(-1;1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$:

* On a $a=-1$, $b=1$ et $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

* Soit $x \in D_f$, montrons que $-2-x \in D_f$

On a $x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2-x \neq -2+1 \Leftrightarrow -2-x \neq -1$. Donc $-2-x \in D_f$

* Soit $x \in D_f$, montrons que $f(2a-x)=2b-f(x)$

On a $f(2a-x)=f(-2-x)=\dfrac{(-2-x)}{(-2-x)+1}=\dfrac{2+x}{x+1}$

Et $2b-f(x)=2\times 1-f(x)=2-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-x}{x+1}=\dfrac{x+2}{x+1}$

D'où $f(2a-x)=2b-f(x)$ C.Q.F.D

Exemple 5

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=3x^2-2x+5$

Montrons que la droite d'équation $x=\dfrac{1}{3}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$:

* On a $a=\dfrac{1}{3}$ et $D_f=\mathbb{R}$

* Donc pour tout $x \in D_f$ on a $(2a-x)=\dfrac{2}{3}-x \in D_f$

* Pour tout $x \in D_f$ on a $f(2a-x)=f\left(\dfrac{2}{3}-x\right)=3\left(\dfrac{2}{3}-x\right)^2-2\left(\dfrac{2}{3}-x\right)+5=\ldots=3x^2-2x+5=f(x)$

D'où $f(2a-x)=f(x)$ C.Q.F.D

Application 6

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x+3}$

Montrer que le point $A(-3;-1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Application 7

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{-3}{x^2-4x+7}$

Montrer que la droite d'équation $x=2$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Cas particuliers :

- Si f est une fonction impaire alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet comme centre de symétrie le point de coordonnées $(0;0)$ (C'est à dire l'origine du repère).
- Une hyperbole, qui est la courbe d'une fonction homographique $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, (avec $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$) admet comme centre de symétrie le point $\Omega\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$.
- Si f est une fonction paire alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet comme axe de symétrie l'axe d'équation $x=0$ (C'est à dire l'axe des ordonnées).
- Une parabole, qui est la courbe d'une fonction polynômiale de degré 2 : $x \mapsto ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$, admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Remarques 5

- Un centre de symétrie n'est pas forcément un point de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (Par exemples : les hyperboles)
- Les éléments de symétries permettent de réduire l'ensemble sur lequel on étudie une fonction et donc de réduire le coût du travail.

4) Construction d'une courbe

Démarche de la construction d'une courbe

➢ **Placer le repère orthogonal ou orthonormé :**

- Placer les deux axes du repère, en respectant l'unité de mesure,
- Placer l'élément de symétrie (axiale ou centrale), s'il y a une symétrie,
- Noter le domaine de définition.

➢ **Comportement local :**

- Placer les points remarquables (extrémums, intersection avec les axes (ox) et (oy)),
- Placer les points d'inflexion, s'il existe,
- Placer les tangentes et les demi-tangentes.

➢ **Comportement asymptotique :**

- Placer les asymptotes de la courbe, en respectant les positions relatives,
- Esquisser les branches paraboliques.

➢ **Finaliser la construction de la courbe :**

- Relier, à main levée, tous les éléments présentés ci-dessus, en respectant le tableau de variations de la fonction.

Exemples 6

Application 8 :

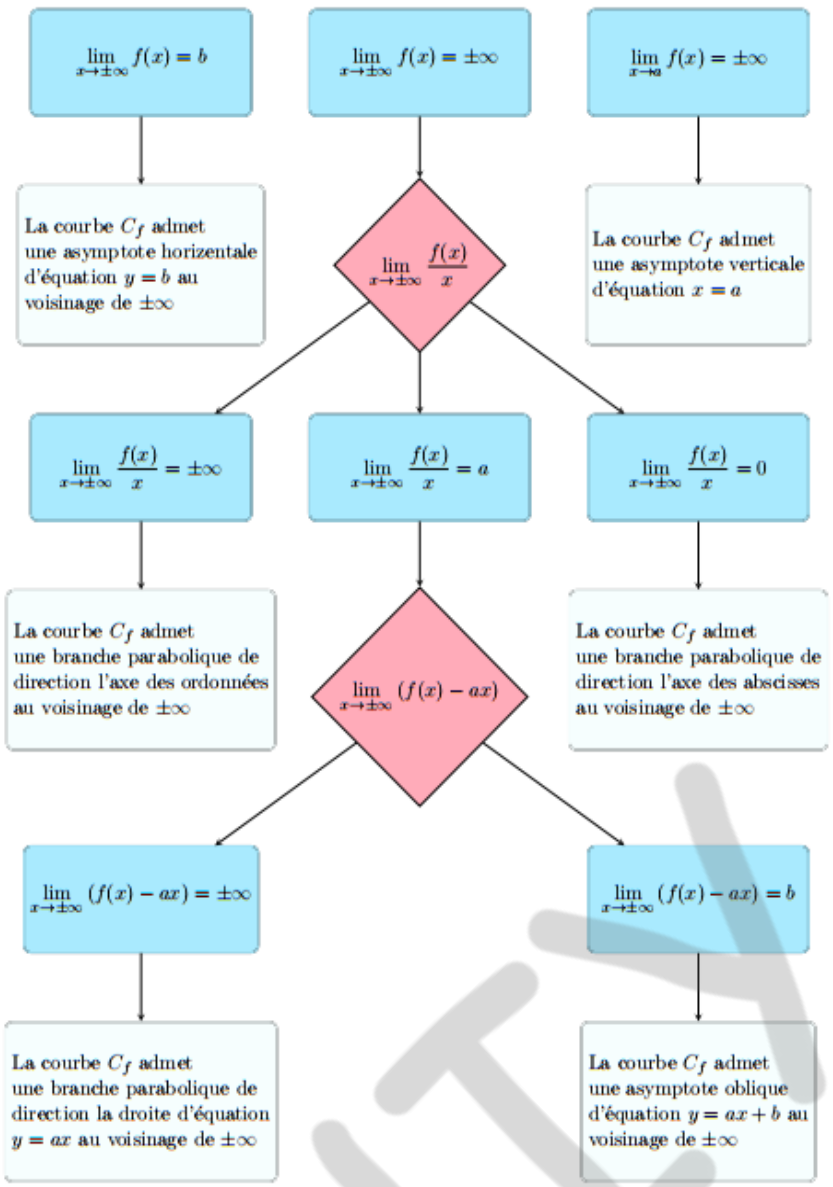
Exercice 1 de la série 03

Remarque 6 : compléments de cours

1) Résolution graphique des équations et des inéquations.
2) Intersection de la courbe avec les axes du repère.
3) Tangentes et demi-tangentes (interprétation graphique de la dérivabilité en un point)

Résumé 3 : Etude de fonctions

Branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$

Concavité de $(\mathcal{C}_f)$

La concavité de $(\mathcal{C}_f)$ se déduit par **l'étude de signe de** $f''(x)$:

- $(\mathcal{C}_f)$ est **convexe** sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f''(x) \geq 0$
- $(\mathcal{C}_f)$ est **concave** sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f''(x) \leq 0$
- Si $f''(a) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de a alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

Positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et $y = ax + b$

Les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) : $y = ax + b$ se déduit par l'étude de signe de $f(x) - (ax+b)$:

- Si $(\forall x \in I)\ f(x) - (ax+b) > 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur I.
- Si $(\forall x \in I)\ f(x) - (ax+b) < 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (D) sur I.
- Si $f(x) - (ax+b) = 0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sont confondues aux points d'abscisses x .

Construction de $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$:

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ sur $J = f(I)$ est le symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ sur I par rapport à la droite $y = x$

Eléments de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

$\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = 2b - f(x)$
$x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$

Méthode de construction de $(\mathcal{C}_f)$:

- Construire **les asymptotes** et **les branches paraboliques** ;
- Construire **les tangentes** et **les demi-tangentes** ;
- Construire **les points remarquables de** $(\mathcal{C}_f)$ s'ils existent : **(Points d'inflexion, points d'intersection avec les axes du repère, les extremums et le centre de symétrie)**
- Construire $(\mathcal{C}_f)$ à **partir du tableau de variations de** f

N.B : N'oublier pas de respecter l'unité de mesure du repère, les positions relatives, la concavité et tenant compte le centre ou l'axe de symétrie (s'il existe).

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BACSPF-2BACSVT	**Série 3** **Etude de fonctions**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1 : Branches infinies - Positions relatives - Construction de la courbe

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=x-1+\sqrt{x-1}$

1) Vérifier que $D_f=[1;+\infty[$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter le résultat graphiquement.

Correction

4) a) Montrer que $\left(\forall x\in]1;+\infty[\right)\ f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x-1}+1}{2\sqrt{x-1}}$

b) En déduire les variations de f

5)- a) Montrer que $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right)\ f(x)-x=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}$

b) En déduire les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) d'équation $y=x$

6)- Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

7)- a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ avec une autre couleur et dans le même repère précédent.

Exercice 2 : Concavité

Soit f la fonction numérique définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x-1}$.

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)- Étudier la continuité de f sur $[1,+\infty[$.

3)- Déterminer la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter le résultat graphiquement.

5)- a)- Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$

b)- En déduire les variations de f.

6)- a)- Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[,\ f''(x)=\dfrac{3x-4}{2\sqrt{(x-1)^3}}$

b)- Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$

7)- Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

8)- Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

9)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

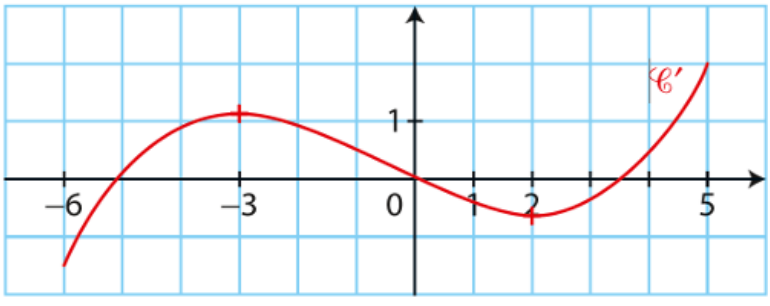
b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 10, puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(10)$. (Remarquer que $10=f(5)$)

10)- Tracer avec une autre couleur et dans le même repère précédent $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$.

Exercice 3 : Lecture graphique

Soit f une fonction deux fois dérivables sur l'intervalle $[-6;5]$

On donne dans le repère ci-dessous, la courbe $(\mathcal{C}')$, représentative de la fonction f', dérivée de f.



1)- Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-6;5]$.

HIYAB

2)- Étudier la concavité de f sur l'intervalle $[-6\ ;5]$ et préciser les abscisses des points d'inflexion de $(\mathcal{C}')$

Problème 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

Correction

1)- Vérifier que : $D_f=[0,1[\cup]1,+\infty[$, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- a)- Montrer que : $\forall x\in D_f-\{0\},\ f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$

b)- Dresser le tableau de variations de f.

5)- Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ coupe la première bissectrice du repère en deux points différents à déterminer.

6)- Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé (on admet que le point d'abscisse 9 est un point d'inflexion).

7)- On admet que g la restriction de f sur l'intervalle $[0,1[$ admet une fonction réciproque notée g^{-1}.

Tracer avec une autre couleur et dans le même repère précédent $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$.

Problème 2

Partie A :

Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=7x^3+6x+1$.

1)- Déterminer $u'(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

2)- Dresser le tableau de variations de u (Les limites ne sont pas demandées).

3)- En déduire que : $\forall x\in[0,+\infty[,\quad u(x)>0$.

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=(x^3+2x+1)\sqrt{x}-3$.

1)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, puis déterminer la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$.

2)- Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

3)- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- a)- Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[,\quad f'(x)=\dfrac{u(x)}{2\sqrt{x}}$.

b)- En utilisant la question A.3), déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

5)- Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α, puis vérifier que : $0,8<\alpha<0,9$.

6)- Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentant la fonction f au point d'abscisse 1.

7)-Tracer (T) et $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé (on admet que $(\mathcal{C}_f)$ possède un point d'inflexion d'abscisse $\beta\simeq 0,1$)

8)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Tracer dans le même repère précédent et avec une autre couleur la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$.

Problème 3

Partie A :

Soit g la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-x^2+3x+1$.

1)- Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2)- Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

3)- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$, et que : $-1<\alpha<0$.

4)- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

HTYAB
المديرية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Partie B :

Correction

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x-\dfrac{2}{x^2+1}$.

1)- Déterminer D_f , puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2)- Étudier la continuité de f sur D_f.

3)- Montrer que : $\forall x\in D_f,\quad f'(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.

4)- Étudier les variations de f , puis dresser son tableau de variations.

5)- Vérifier que la première bissectrice du repère est l'asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

6)- Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

7)- Soit h la restriction de f sur un l'intervalle $I=[0,+\infty[$.

a)- Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Dresser le tableau de variations de h^{-1}.

Problème 4

Considérons la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2+2x} & ;\ x\geq 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & ;\ x<0 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f et continue en 0.

2) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 , puis interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=1$, et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=1$.

b) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à déterminer son équation.

5) a) Montrer que : $f'(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} & ;\ x>0 \\ \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} & ;\ x<0 \end{cases}$

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x>0$ et pour tout $x<0$, puis dresser le tableau de variations de f

6) a) Montrer que : $f''(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} & ;\ x>0 \\ \dfrac{-3x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^3} & ;\ x<0 \end{cases}$

b) Déduire la concavité de courbe $(\mathcal{C}_f)$

7) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

8) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]-\infty;0[$.

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que $g^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\dfrac{1}{2}$, puis déduire $\left(g^{-1}\right)'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

c) Montrer que $g^{-1}(x)=-\sqrt{\dfrac{x^2}{1-x^2}}$, pour tout x de l'intervalle J.

d) Tracer dans le même repère les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$

04
Suites numériques

HIYAB

1) Rappel

- Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.
- Une suite numérique $(u_n)_{n\in I}$ peut être définie :
  - Formule explicite : À partir d'une fonction f de la variable n : $u_n = f(n)$.
  - Formule récurrente : À partir d'une relation de récurrence : $(u_n)_{n\in I}$ est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée par $M \Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_n \leq M$
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée par $m \Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_n \geq m$
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite croissante $\Leftrightarrow \quad (\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite décroissante $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite constante $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n$.

	Arithmétique	Géométrique
Comment montrer qu'une suite numérique $(v_n)_{n\in I}$ est une suite :	$v_{n+1} - v_n = r$	$v_{n+1} = qv_n$
Comment déterminer v_n en fonction de n si $(v_n)_{n\in I}$ est une suite :	$v_n = v_p + (n-p)r$ ($p=0$ ou $p=1$ ou…….)	$v_n = v_p \times q^{n-p}$ ($p=0$ ou $p=1$ ou…….)
Comment calculer la somme des termes consécutifs de la suite $(v_n)_{n\in I}$ si $(v_n)_{n\in I}$ est une suite :	$v_p + v_{p+1} + \ldots + v_n = \frac{(n-p+1)}{2} \times (v_p + v_n)$	$v_p + v_{p+1} + \ldots + v_n = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
Si a, b et c dans cet ordre sont des termes consécutifs d'une suite	alors $b = \frac{a+c}{2}$	alors $b^2 = a \times c$

Principe de récurrence :

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pour montrer que la proposition $(\forall n \geq n_0)$ $P(n)$ est vraie, on suit les étapes suivantes :

- Initialisation : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \geq n_0$, on suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

Exemple 1 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$.

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n < 3$

3) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

4) On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$

a) Calculer v_0 et v_1

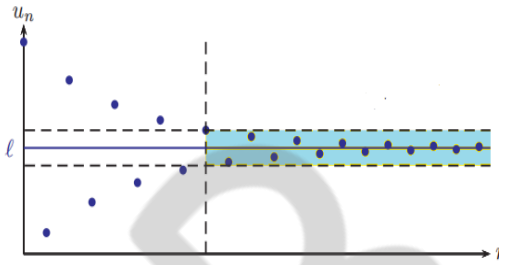
Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

5) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

2) Limites de suites de références :

1) Limite finie d'une suite :



• On dit que la limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est le nombre réel l si tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à partir d'un certain rang.

• On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou $\lim u_n = l$.

2) Limite infinie d'une suite :

• On dit que la limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est $+\infty$ si tout intervalle de type $]A;+\infty[$, où $A>0$, contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à partir d'un certain rang.

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.

• On dit que la limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est $-\infty$ si tout intervalle de type $]-\infty;-A[$, où $A>0$, contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à partir d'un certain rang.

On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$.

3) Limite de suites de références :

Soit p un entier naturel non nul, et α un nombre réel. On a :

• $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha}{n^p} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha}{\sqrt[p]{n}} = 0$.

En particulier :

• $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$.

4) Suite convergente –suite divergente

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

• On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente s'il admet une limite finie.

• On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est divergente s'il n'a pas de limite ou s'il admet une limite infinie.

• La limite d'une suite numérique, lorsqu'elle existe, est unique.

• Soit $l \in \mathbb{R}$, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$.

• Si $u_n = f(n)$ tel que f est une fonction numérique définie sur un intervalle de type $]A;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (tel que $l \in \mathbb{R}$, ou $l = +\infty$ ou $l = -\infty$) alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

• l'étude de la limite d'une suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ se fait seulement quand n tend vers $+\infty$ donc on peut écrire $\lim u_n$ au lieu de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exemple 2 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n + 5n^4}{n^4}$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

5) Remarque : Opérations sur les limites des suites- Limite et ordre :

1) On admet que les opérations sur les limites des fonctions en $+\infty$ restent aussi valables pour les limites des suites.

KTY AB

2) Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq p}$ deux suites numériques convergentes.

• Si à partir d'un certain rang on a : $u_n > v_n$, alors : $\lim u_n \geq \lim v_n$.

• En particulier : si à partir d'un certain rang on a : $u_n > 0$, alors : $\lim u_n \geq 0$.

Exemple 3 :

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{5}{\sqrt[3]{n}} + 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 - 8n + 3$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 5n + 1}{-n^2 + 6n + 7}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 - 5n + 3} - n$.

Exemple 4 (Exam. Nat. 2016 S.R)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{16} u_n + \frac{15}{16}$.

1) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$.

b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ puis exprimer v_n en fonction de n .

b) Montrer que $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis déterminer la limite de la suite (u_n) .

3) Théorème de la convergence monotone

Théorème :

• Toute suite croissante et majorée est convergente.

• Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exemple 5 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{5}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \frac{3}{2}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < 2$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) Critères de convergence

Propriétés :

α est un nombre réel strictement positif.

1) Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq p}$ deux suites numériques tels qu'à partir d'un certain rang on a : $v_n \geq \alpha u_n$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2) Soient $(v_n)_{n\geq p}$ et $(w_n)_{n\geq q}$ deux suites numériques convergentes et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite tels qu'à partir d'un certain rang on a : $v_n \leq u_n \leq w_n$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

3) Soient $(v_n)_{n\geq p}$ une suite numérique et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite telles qu'à partir d'un certain rang on a : $|u_n - l| \leq \alpha v_n$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple 6 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = sin(\frac{\pi}{3}n) + n^3 + 1$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n \geq n^3$.

2) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exemple 7 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \frac{cos(n^2)}{\sqrt[5]{n}} - 4$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\frac{-1}{\sqrt[5]{n}} - 4 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt[5]{n}} - 4$.

2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exemple 8 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 + \frac{(-1)^n \pi}{n+2}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $|u_n - 1| < \frac{\pi}{n}$.

2) En déduire la limite de la suite (u_n).

5) Limites des suites : $(a^n)_n$ et $(n^\alpha)_n$:

1) Limite de la suite $(a^n)_n$:

Soit a un nombre réel non nul.

- Si $a > 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
- Si $-1 < a < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
- Si $a = 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$.
- Si $a \leq -1$, alors la suite $(a^n)_n$ n'admet pas de limite.

2) Limite de la suite $(n^\alpha)_n$:

Soit α un nombre rationnel non nul.

- Si $\alpha > 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.
- Si $\alpha < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.

Exemple 9 :

Dans chacun des cas suivants déterminer la limite de la suite (u_n) :

$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $u_n = \left(\frac{8}{3}\right)^n$; $u_n = \left(-\frac{5}{2}\right)^n$; $u_n = n^{\frac{1}{2}}$; $u_n = n^{-\frac{5}{2}}$.

Exemple 10 :

Dans chacun des cas suivants déterminer la limite de la suite (u_n) :

$u_n = \frac{2}{7^n}$; $u_n = \frac{3^n + 2^n}{4^n}$; $u_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}$; $u_n = n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{2}{3}}$

Exemple 11 :

Soit l un nombre réel et (u_n) une suite numérique vérifiant : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|u_{n+1} - l| \leq k|u_n - l|$ où $k \in]0;1[$.

1) Montrer par deux méthodes que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

6) Limites de suites de la forme $v_n = f(u_n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$

1) Limite de la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ tel que $v_n = f(u_n)$:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique tel que :

$u_n \in I$ pour tout $n \geq n_0$.

$(v_n)_{n\geq n_0}$ la suite définie par : $n \geq n_0$; $v_n = f(u_n)$.

Si :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
- f est continue en l .

Alors la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente et sa limite est : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(l)$.

Exemple 12 :

Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par : $v_n = tan\left(\dfrac{\pi+(-0.8)^n}{6+(-0.8)^n}\right)$.

2) Limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$:

Théorème :

Soient I un **intervalle fermé** de $\mathbb{R}$, et f est une fonction définie sur I .

Notons $(u_n)_{n_0}$ la suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si : 1) $u_{n_0} \in I$; 2) f est continue sur I ; 3) $f(I) \subset I$; 4) la suite $(u_n)_{n_0}$ est convergente

Alors la limite de la suite $(u_n)_{n_0}$ est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans I

Remarques :

- Si les termes de la suite $(u_n)_{n_0}$ sont contenus dans un intervalle ouvert de la forme $]a;b[,]-\infty;a[$ ou $]a;+\infty[$, alors on choisit comme intervalle I respectivement $[a;b],]-\infty;a], ou\ [a;\infty[$.
- Dans le cas où l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions sur l'intervalle I :
  - Si la suite $(u_n)_{n_0}$ est croissante, alors $l > u_{n_0}$.
  - Si la suite $(u_n)_{n_0}$ est décroissante, alors $l < u_{n_0}$.
- Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle I, sont les abscisses des points d'intersection de la courbe (C_f) avec la droite d'équation $y = x$ (appelée la première bissectrice), appartenant à l'intervalle I.

Exemple 13 :

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [-1;2]$ par : $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+3}$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Etudier les variations de la fonction f sur I .

2) Montrer que $f(I) \subset I$.

3) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad -1 \leq u_n \leq 2$.

4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+3}$.

5) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

6) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FTYAB

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Résumé 4 : Suites numériques

Monotonie d'une suite numérique :

• Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si et seulement si $(\forall n \geq n_0) \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$.

• Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si et seulement si $(\forall n \geq n_0) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$.

• Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si et seulement si $(\forall n \geq n_0) \quad u_{n+1} = u_n$.

Suite majorée-suite minorée-suite bornée :

• Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n \geq p) \quad u_n \leq M$.

• Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n \geq p) \quad u_n \geq m$.

• La suite $(u_n)_{n\geq p}$ est dite bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

Suite arithmétique :

• Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est dite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que : $(\forall n \geq p) \quad u_{n+1} = u_n + r$.

. Le nombre r est appelé raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n\geq p}$

$(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison r

Quels que soit les entiers naturels p et q on a

$$u_q = u_p + (q-p)r \ .$$

En particulier $u_n = u_0 + nr$; $u_n = u_1 + (n-1)r$.

• Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2} \ .$$

Suite géométrique :

• Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est dite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que : $(\forall n \geq p) \quad u_{n+1} = q u_n$.

Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique $(u_n)_{n\geq p}$.

$(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison q

Quels que soit les entiers naturels n et p on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

En particulier $u_n = u_0 \times q^n$; $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

• Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} \ .$$

Limite de la suite $(a^n)_n$:

Soit a un nombre réel non nul.

• Si $a > 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

• Si $-1 < a < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.

• Si $a = 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$.

• Si $a \leq -1$, alors $(a^n)_n$ n'admet pas de limite.

Limite de la suite $(n^\alpha)_n$:

Soit α un nombre rationnel non nul.

• Si $\alpha > 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.

• Si $\alpha < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$.

Suite convergente –suite divergente :

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

• On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente s'il admet une limite finie.

• On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est divergente s'il n'a pas de limite ou s'il admet une limite infinie.

Critères de convergence :

1) Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq p}$ deux suites tels qu' à partir d'un certain rang on a : $v_n \geq u_n$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2) Soient $(v_n)_{n\geq p}$ et $(w_n)_{n\geq q}$ deux suites convergentes et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite tels qu'à partir d'un certain rang on a : $v_n \leq u_n \leq w_n$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

3) Soient $(v_n)_{n\geq p}$ une suite numérique et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite telles qu'à partir d'un certain rang on a : $|u_n - l| \leq v_n$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Théorème de la convergence monotone :

• Toute suite croissante et majorée est convergente.

• Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Limite de la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ tel que $v_n = f(u_n)$:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique tel que :

$u_n \in I$ pour tout $n \geq n_0$.

$(v_n)_{n\geq n_0}$ la suite définie par : $n \geq n_0$; $v_n = f(u_n)$.

Si :

• $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

• f est continue en l .

Alors la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente et sa limite est : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(l)$.

Limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$:

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et f est une fonction définie sur I avec.

Notons $(u_n)_{n_0}$ la suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si :

1) $u_{n_0} \in I$; 2) f est continue sur I ; 3) $f(I) \subset I$; 4) la suite $(u_n)_{n_0}$ est convergente.

Alors la limite de la suite $(u_n)_{n_0}$ est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans I

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0=-1$ et $u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n}$.

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n<3$

3) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

4) On considère la suite (v_n) définie par : $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

a) Calculer v_0 et v_1

b) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

5) a) Calculer en fonction de n la somme :

$S_n=v_1+v_2+...+v_n$.

b) En déduire la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1\le u_n<2$.

2) Montrer que :

$(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2}$.

3) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\dfrac{1}{5}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n^2+\dfrac{3}{4}u_n$.

Correction

1) Montrer par récurrence que :

$(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\le u_n<\dfrac{1}{4}$.

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\ge1}$ définie par :

$u_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+.....+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ..

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n\ge\sqrt{n}$.

2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\ge1}$.

Exercice 5 :

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ sachant que :

$u_n=\left(\dfrac{7}{4}\right)^0+\left(\dfrac{7}{4}\right)^1+\left(\dfrac{7}{4}\right)^2+.....+\left(\dfrac{7}{4}\right)^n$

Exercice 6 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$.

1) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\ge1$

2) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-1\le\dfrac{1}{3}(u_n-1)$

3) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n-1\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $\begin{cases}u_0=-1\\ u_{n+1}=5u_n+3\end{cases}$.

On considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $v_n=u_n+\dfrac{3}{4}$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 8 :

Soit f la fonction numérique définie sur $I=[1;2]$ par :

$f(x)=\dfrac{5x-1}{x+3}$.

1) Montrer que f est strictement croissante sur I .

2) Montrer que $f(I)\subset I$.

3) Montrer que : $(\forall x\in I)\quad f(x)\le x$.

4) On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=\dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1\le u_n\le2$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c) Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

Exercice 9 :

On considère la suite $(u_n)_{n\ge1}$ définie par :

$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+.....+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\ge1}$.

Exercice 10 :

Soit f la fonction numérique définie sur $I=[0;8]$ par : $f(x)=\frac{3}{4}x+2$.

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer que $f(I)\subset I$.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\le u_n\le 8$.

3) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

4) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=u_n-8$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

Exercice 11 :

On considère la suite $(u_n)_{n\ge1}$ définie par $u_1=5$ et $u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{1+u_n}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n>2$.

2) Soit $(v_n)_{n\ge1}$ la suite numérique définie par : $v_n=\frac{3}{u_n-2}$ pour tout entier naturel non nul.

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ v_{n+1}=\frac{1+u_n}{u_n-2}$ et montrer que $(v_n)_{n\ge1}$ est une suite arithmétique de raison 1.

b) Exprimer v_n en fonction de n et déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n=2+\frac{3}{n}$.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\ge1}$

Exercice 12 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=13$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7$.

1) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n<14$.

2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n=14-u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis exprimer v_n en fonction de n.

b) Déduire que $u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puis déterminer la limite de la suite (u_n)

4) Déterminer le plus petite entier naturel n tel que $u_n>13.99$.

Exercice 13 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}):\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\left(1+\sqrt{u_n}\right)^2}\end{cases}.$$

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n>0$.

2) a) Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}):\ \frac{1}{\left(1+\sqrt{u_n}\right)^2}<1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.

3) On considère la suite (v_n) définie par $(\forall n\in\mathbb{N}):v_n=\frac{1}{\sqrt{u_n}}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b) Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que : $u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice 14 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=4$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{4u_n-3}{u_n}$.

I 1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n>3$.

3) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-3)}{u_n}$.

4) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

II 1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}-3\le\frac{1}{3}(u_n-3)$.

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n-3\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Correction

III On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\frac{u_n-3}{u_n-1}$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3) Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

IV

Soit f la fonction définie sur $I=[3;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{4x-3}{x}$

1) Etudier les variations de la fonction f sur I.

2) Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=f(u_n)$.

3) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n>3$.

4) Vérifier que : $f(I)\subset I$.

5) Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

05
Primitives

HIYAB

1) Définition d'une fonction primitive :

Activité 1 :

Soient f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=15x^3+2x+1$ et $F(x)=5x^3+x^2+x-3$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$.

2) Donner deux autres fonctions G et H dérivables sur $\mathbb{R}$ et tels que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad G'(x)=H'(x)=f(x)$.

Définition :

Soient f et F deux fonctions définies sur un même intervalle I.

On dit que F est une primitive de f sur I, si : F est dérivable sur I et pour tout $x\in I$, $F'(x)=f(x)$.

Théorème 1 (admis) :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive définie sur I.

Exemple 1 :

Dans chacun des cas suivants vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle I.

1) $f(x)=x^4-12x^2+3$, $F(x)=\frac{1}{5}x^5-4x^3+3x+2$ et $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=2\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}$, . $F(x)=6\sqrt[3]{x}-8\sqrt{x}$. et $I=]0;+\infty[$.

3) $f(x)=tan^2(x)-cos(x)+sin(x)-\frac{8}{x^2}$, $F(x)=tan(x)-cos(x)-sin(x)+\frac{8}{x}-x$ et $I=\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$.

Solution :

1) • On a : F est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$F'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-4x^3+3x+2\right)'=\frac{1}{5}(x^5)'-4(x^3)'+3(x)'+(2)'=\frac{1}{5}(5x^4)-4(3x^2)+3\times(1)+(0)=x^4-12x^2+3=f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) • On a : F est dérivable sur $I=]0;+\infty[$ car les fonctions $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sont dérivables sur I.

• Pour tout $x\in I$ on a : $F'(x)=\left(6\sqrt[3]{x}-8\sqrt{x}\right)'=6\left(\sqrt[3]{x}\right)'-8\left(\sqrt{x}\right)'=6\times\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}\right)-8\times\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=2\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}=f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur I.

3) • On a : F est dérivable sur $I=\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$. car les fonctions $x\mapsto tan(x)$, $x\mapsto cos(x)$ et $x\mapsto sin(x)$ sont dérivables sur I.

• Pour tout $x\in I$ on a : $F'(x)=\left(tan(x)-cos(x)-sin(x)+8\times\frac{1}{x}-x\right)'=\left(1+tan^2(x)\right)-\left(-sin(x)\right)-\left(cos(x)\right)+8\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)-1$

$=tan^2(x)-cos(x)+sin(x)-\frac{8}{x^2}=f(x)$. Donc F est une primitive de f sur I.

Application 1 :

Dans chacun des cas suivants vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle I.

1) $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$, $F(x)=x^2-\frac{1}{x}$ et $I=]0;+\infty[$.

2) $f(x)=(24x^2+12)(2x^3+3x-1)^3$, $F(x)=(2x^3+3x-1)^4$ et $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\frac{-6x}{(x^2-1)^4}$, $F(x)=\frac{1}{(x^2-1)^3}$ et $I=]1;+\infty[$.

4) $f(x)=\frac{x}{2}\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}$, $F(x)=\sqrt[4]{x^2+1}$ et $I=\mathbb{R}$.

5) $f(x)=-\frac{1}{x^2}cos(\frac{1}{x})$, $F(x)=sin(\frac{1}{x})$ et $I=]-\infty;0[$.

6) $f(x)=\frac{-x^2-26x+7}{(x^2-x-6)^2}$, $F(x)=\frac{x^2+7}{x^2-x-6}$ et $I=]-\infty;-2[$.

7) $f(x)=2\sqrt{3x^5}+(2x+3)\frac{15x^4}{2\sqrt{3x^5}}$, $F(x)=(2x+3)\sqrt{3x^5}$ et $I=]0;+\infty[$.

Application 2 :

1) Justifier que la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$.

2) Donner le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.

Application 3 :

1) Déterminer l'ensemble de définition de f telle que $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}$.

2) Déterminer a et b pour que f admette une primitive F telle que $F(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + x + 1}$.

2) Primitives d'une fonction continue :

Activité 2 :

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par : $f(x) = sin(2x)$.

1) Montrer que l'expression générale d'une primitive F de f est $F(x) = -\dfrac{1}{2}cos(2x) + c$ où c est une constante réelle.

2) a) Déterminer une primitive F de f tel que $F(0) = -1$.

b) Existe-il une autre primitive G de f tel que $G(0) = -1$?

Théorème 2 :

Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.

- Toute fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un réel, est une primitive de f sur I.
- Les primitives de f sur I sont de la forme : $x \mapsto F(x) + c$ où c est une constante réelle.

Théorème 3 :

Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** primitive F de f sur I vérifiant : $F(x_0) = y_0$.

Exemple 2 :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

1) Montrer que la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où c est un réel, est aussi une primitive de f sur I.

2) Montrer que si H est une primitive de f sur I alors la fonction $H - G$ est constante sur I.

Solution :

1) Soit c e un réel

Puisque F est dérivable sur I, alors la fonction G tel que $x \mapsto F(x) + c$ est dérivable sur I.

Pour tout $x \in I$ on a : $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = F'(x)$

Or : $F'(x) = f(x)$ car F est une primitive de f sur I, alors $(\forall x \in I)\ G'(x) = f(x)$.

2) Soit H une primitive de f sur I

Donc H est dérivable sur I, $(\forall x \in I)\ H'(x) = f(x)$ et la fonction $H - G : x \mapsto H(x) - G(x)$ est dérivable sur I.

Pour tout $x \in I$ on a : $(H - G)'(x) = (H(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$

Donc la fonction $H - G$ est constante sur I.

Autre méthode :

On a H est une primitive de f sur I, donc il existe un réel c' tel que pour tout $x \in I$, $H(x) = F(x) + c'$.

Donc pour tout $x \in I$, $(H - G)(x) = (H(x) - G(x))' = (F(x) + c) - (F(x) + c') = c - c'$.

D'où la fonction $H - G$ est constante sur I.

Exemple 3 :

Soient f et F les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x} - x$ et $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}x^2$.

1) Montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2) Déterminer la primitive G de f sur $]0;+\infty[$ telle que $G(1) = 2$.

Solution :

1) • On a : F est dérivable sur $]0;+\infty[$ car les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur I.

• Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a : $F'(x) = \left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}x^2\right)' = \dfrac{2}{3}\left(x\sqrt{x}\right)' - \dfrac{1}{2}\left(x^2\right)'$

$$= \frac{2}{3}\left((x)'\times\sqrt{x}+x\times\left(\sqrt{x}\right)'\right)-\frac{1}{2}(2x)=\frac{2}{3}\left(1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-x$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-x=\frac{2}{3}\times\frac{3\sqrt{x}}{2}-x=\sqrt{x}-x=f(x)\ .$$

Donc F est une primitive de f sur I .

2) Soit G une primitive de f sur I .

• Donc il existe un réel c tel que $G(x)=F(x)+c$ c'est-à-dire $G(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2+c$.

• On a : $G(1)=2\Leftrightarrow\frac{2}{3}1\sqrt{1}-\frac{1}{2}1^2+c=2\Leftrightarrow c=2-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow c=\frac{11}{6}$.

D'où la primitive G de f sur $]0;+\infty[$ telle que $G(1)=2$ est définie par : $G(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{6}$.

Application 4 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=sin(x)$.

1) Donner la forme générale d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer la fonction primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=2$.

3) Déterminer la fonction primitive G de . f . sur $\mathbb{R}$ telle que $G(\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$.

3) Fonctions primitives de somme de fonctions : g

Activité 3 :

Soient f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

1) Montrer que les fonctions f et g admettent des primitives sur I .

2) Soient F et G deux primitives respectives de f et g sur I .

a) Montrer que la fonction $F+G$ définie sur I par : $(F+G)(x)=F(x)+G(x)$ est une primitive de la fonction $f+g$ sur I .

b) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, montrer que la fonction αF définie sur I par : $(\alpha F)(x)=\alpha F(x)$ est une primitive de αf sur I .

Théorème 4 :

Soient α et β deux réels.

Si F et G sont deux primitives respectives de f et sur un intervalle I , alors :

• $F+G$ est une primitive de la fonction $f+g$ sur I .

• $\alpha F+\beta G$ est une primitive de la fonction $\alpha f+\beta g$ sur I .

Exemple 4 :

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=cos(x)$ et $g(x)=\frac{1}{x^2}$.

1) Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer une primitive G de g sur $]0;+\infty[$.

3) En déduire une primitive de la fonction $2f+3g$ sur $]0;+\infty[$.

Solution :

1) On sait que la fonction F tel que $F(x)=sin(x)$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) On sait que la fonction G tel que $G(x)=-\frac{1}{x}$, est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $G'(x)=g(x)$.

Donc G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

3) On a la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, en particulier F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Or la fonction G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

Donc la fonction $2F+3G$ une primitive de la fonction $2f+3g$ sur $]0;+\infty[$.

Application 5 :

Déterminer, dans chaque cas, une primitive de f sur l'intervalle I .

1) $f(x)=-2cos(x)+5sin(x)$ et $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=-2x^2+3x$ et $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\frac{-3}{x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}$ et $I=]0;+\infty[$.

4) $f(x)=cos(2x)+sin(3x)$ et $I=\mathbb{R}$.

5) $f(x)=4+4tan^2(x)$ et $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

6) $f(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$ et $I=[4;7]$.

Application 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=2sin(3x)+3cos(2x)$.

1) Déterminer une fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer la fonction primitive G de f sur $[-\pi;\pi]$ telle que $G(0)=-1$.

4) Fonctions primitives des fonctions usuelles :

Activité 4 :

Soient f, g et h les fonctions définies respectifs sur les intervalles $I=]0;+\infty[$, $J=]-\infty;0[$ et $K=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$f(x)=\sqrt[3]{x}$; $g(x)=-\frac{1}{x^2}$; $h(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$.

1) Vérifier que les fonctions f, g et h admet des primitives sur I, J et K respectivement.

2) Montrer que les fonctions F, G et H définies respectifs sur I, J et K par :

$F(x)=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}$; $g(x)=\frac{1}{x}+2$; $h(x)=tan(x)-4$, sont des primitives de f, g et h respectivement.

Primitives des fonctions usuelles

a un nombre réel, $n\in\mathbb{N}^*$ et $r\in\mathbb{Q}^*\setminus\{-1\}$.

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$f(x)$	$F(x)$	I
0	c	$\mathbb{R}$
a	ax	$\mathbb{R}$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$sin(x)$	$-cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$sin(x)$	$\mathbb{R}$
$1+tan^2(x)$	$tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ tel que $k\in\mathbb{Z}$

- Les primitives de la fonction $x\mapsto u'cos(u)$ sur I sont les fonctions $x\mapsto sin(u)+c$
- Les primitives de la fonction $x\mapsto u'sin(u)$ sur I sont les fonctions $x\mapsto -cos(u)+c$
- Les primitives de la fonction $x\mapsto u'(ax+b)$ sur I sont les fonctions $x\mapsto \frac{1}{a}u(ax+b)+c$

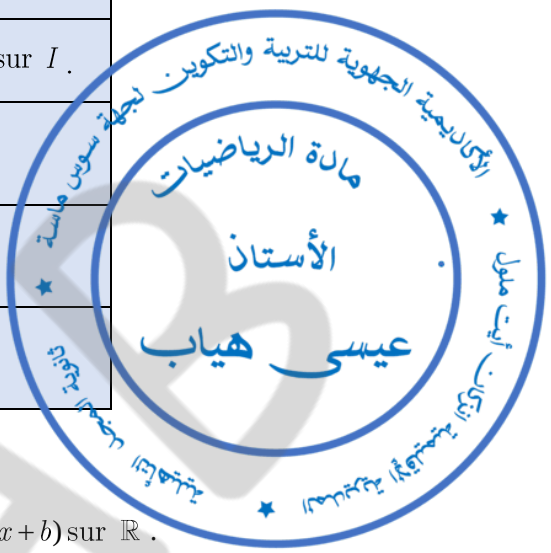
Opérations sur les fonction primitives

a, b et α des nombres réels et $r\in\mathbb{Q}^*\setminus\{-1\}$.

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I .

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I alors :

f	F	Conditions
$u'+v'$	$u+v$	• u et v sont dérivables sur I
$\alpha\times u'$	αu	• u est dérivable sur I
$u'\times v+u\times v'$	$u\times v$	• u et v sont dérivables sur I
$\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	• u et v sont dérivables sur I • $(\forall x\in I)\quad v(x)\neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$	• u est dérivable sur I • $(\forall x\in I)\quad u(x)\neq 0$
$u'\times u^r$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	• u^r est définie et dérivable sur I.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	• u est dérivable sur I • $(\forall x\in I)\quad u(x)>0$
$\frac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$n\sqrt[n]{u}$	• u est dérivable sur I • $(\forall x\in I)\quad u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$ln(\lvert u\rvert)$	• u est dérivable sur I • $(\forall x\in I)\quad u(x)\neq 0$



Exemple 5 :

Soient a et b des nombres réels tel que $a\neq 0$.

1) Vérifier que la fonction $F:x\mapsto\frac{1}{a}sin(ax+b)$ est une primitive de $f:x\mapsto cos(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$.

2) Vérifier que la fonction $G:x\mapsto-\frac{1}{a}cos(ax+b)$ est une primitive de $g:x\mapsto sin(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions h et k définies par : $h(x)=cos(2x)$ et $k(x)=sin(3x)$.

Solution :

1) • On a : F est dérivable sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x\mapsto ax+b$ et $x\mapsto sin(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$F'(x)=\left(\frac{1}{a}sin(ax+b)\right)'=\frac{1}{a}\left(sin(ax+b)\right)'=\frac{1}{a}\left((ax+b)'\times sin'(ax+b)\right)=\frac{1}{a}\left(a\times cos(ax+b)\right)=cos(ax+b)=f(x)$. Donc F est une primitive de f sur I.

2) • On a : G est dérivable sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x\mapsto ax+b$ et $x\mapsto cos(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$G'(x)=\left(\frac{1}{a}cos(ax+b)\right)'=\frac{1}{a}\left(cos(ax+b)\right)'=\frac{1}{a}\left((ax+b)'\times cos'(ax+b)\right)=\frac{1}{a}\left(a\times(-sin(ax+b))\right)=-sin(ax+b)=g(x)$. Donc G est une primitive de g sur I.

3) D'après les questions précédentes on déduit que :

• La fonction $H:x\mapsto\frac{1}{2}sin(2x)$ est une primitive de $h:x\mapsto cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

• La fonction $K:x\mapsto-\frac{1}{3}cos(3x)$ est une primitive de $k:x\mapsto sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6 :

1) Vérifier que la fonction f définies par : $f(x)=tan^2(4x)$ admet une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$.

2) Déterminer une primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$.

3) En déduire la primitive G de f sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$ telle que $G(\frac{\pi}{16})=-\frac{\pi}{4}$.

Solution :

1) On sait que la fonction $u : x \mapsto tan^2(x)$ est continue sur $J = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction $v : x \mapsto 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $I = \left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$.

Or $v(I) \subset J$ (facile à vérifier), alors la fonction $f = uov$ est continue sur $I = \left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$.

2) On sait que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$: $\left(tan(4x)\right)' = (4x)'\times\left(tan'(4x)\right) = 4\times\left(1+tan^2(4x)\right) = 4+tan^2(4x) = 4+f(x)$

Donc la primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$ est la primitive de $x \mapsto \left(tan(4x)\right)' - 4$ sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$.

Ou encore la primitive de $x \mapsto \left(tan(4x)-4x\right)'$ sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$.

D'où une primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$ est la fonction F définie par :

$F(x) = tan(4x) - 4x$.

La fonction h est une primitive de la fonction h'.

3) Soit G une primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$.

• Donc il existe un réel c tel que $G(x) = F(x) + c$ c'est-à-dire $G(x) = tan(4x) - 4x + c$.

• On a : $G(\frac{\pi}{16}) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow tan(4\frac{\pi}{16}) - 4\frac{\pi}{16} + c = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow c = -1$.

D'où la primitive G de f sur $\left]-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right[$ telle que $G(\frac{\pi}{16}) = -\frac{\pi}{4}$ est définie par : $G(x) = tan(4x) - 4x - 1$.

Exemple 7 :

Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de chacune des fonctions f, g, h et k définies par :

$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $h(x) = \sqrt[5]{x^2}$ et $k(x) = \frac{1}{x^7}$.

Solution :

Soit $x \in]0;+\infty[$.

• On a : $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} = -2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -2\left(\sqrt{x}\right)'$.

D'où une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est la fonction F définie par : $F(x) = -2\sqrt{x}$.

• On a : $g(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Donc une primitive de g sur $]0;+\infty[$ est la fonction G définie par : $G(x) = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$.

• On a : $h(x) = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$.

Donc une primitive de h sur $]0;+\infty[$ est la fonction H définie par : $H(x) = \frac{1}{\frac{2}{5}+1}x^{\frac{2}{5}+1} = \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7}$.

• On a : $k(x) = \frac{1}{x^7}$.

Donc une primitive de k sur $]0;+\infty[$ est la fonction K définie par : $K(x) = \frac{1}{-7+1}x^{-7+1} = -\frac{1}{6x^6}$.

Exemple 8 :

Déterminer les primitives F sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = 6x^5 + 2x - 5$ et $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $I =]0;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{4}{x^3}$ et $I=]-\infty;0[$

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$ et $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(5x-2)^3}$ et $I=\left]\dfrac{2}{5};+\infty\right[$

6) $f(x)=(2x+1)^6$ et $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4}}$ et $I=\mathbb{R}$.

8) $f(x)=\dfrac{cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ et $I=[1:4]$

Solution :

1) • Soit $x\in I$, on a : $f(x)=6x^5+2x-5=\left(x^6+x^2-5x\right)'$.

• D'où une primitive de f sur I est la fonction F définie par : $F(x)=x^6+x^2-5x$.

2) • Soit $x\in I$, on a : $f(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\left(x+\sqrt{x}\right)'$.

• D'où une primitive de f sur I est la fonction F définie par : $F(x)=x+\sqrt{x}$.

3) • Soit $x\in I$, on a : $f(x)=\dfrac{4}{x^3}=4\times\dfrac{1}{x^3}=4\times\left(\dfrac{1}{-3+1}x^{-3+1}\right)'=4\times\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)'$.

• D'où une primitive de f sur I est la fonction F définie par : $F(x)=4\times\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)=-\dfrac{2}{x^2}$.

4) • Soit $x\in I$, on a : $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}=\dfrac{(x^2+x+3)'}{(x^2+x+3)^2}=\left(-\dfrac{1}{x^2+x+3}\right)'$.

• D'où une primitive de f sur I est la fonction F définie par : $F(x)=\left(-\dfrac{1}{x^2+x+3}\right)$.

5) • Soit $x\in I$, on a :

$f(x)=\dfrac{1}{(5x-2)^3}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{(5x-2)'}{(5x-2)^3}=\dfrac{1}{5}\times(5x-2)'(5x-2)^{-3}=\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{1}{-3+1}(5x-2)^{-3+1}\right)'=\left(-\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{(5x-2)^2}\right)'$.

• D'où une primitive de f sur I est la fonction F définie par : $F(x)=-\dfrac{1}{10(5x-2)^2}$.

6) • Soit $x\in I$, on a : $f(x)=6x^5+2x-5=\left(x^6+x^2-5x\right)'$.

• D'où une primitive de f sur I est la fonction F définie par : $F(x)=x^6+x^2-5x$.

7) • Soit $x\in I$, on a : $f(x)=(2x+1)^6=\dfrac{1}{2}(2x+1)'(2x+1)^6=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6+1}(2x+1)^{6+1}\right)'=\left(\dfrac{1}{14}(2x+1)^7\right)'$.

• D'où une primitive de f sur I est la fonction F définie par : $F(x)=\dfrac{1}{14}(2x+1)^7$.

8) • Soit $x\in I$, on a : $f(x)=\dfrac{cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\times cos(\sqrt{x})=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times cos(\sqrt{x})=2\times\left(\sqrt{x}\right)'\times cos(\sqrt{x})=2\left(sin(\sqrt{x})\right)'$.

• D'où une primitive de f sur I est la fonction F définie par : $F(x)=2sin(\sqrt{x})$.

Application 7 :

Déterminer les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+sin(x)$ et $I=]-\infty;0[$

2) $f(x)=cos(2x)-sin(2x)+x^8$ et $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{6x-1}{(3x^2-x)^2}$ et $I=]1;+\infty[$

4) $f(x)=(2x-1)(x^2-x+7)$ et $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{sin(x)}{\sqrt{2+cos(x)}}$ et $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\dfrac{tan^2(x)}{cos^2(x)}$ et $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

7) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x^3-8)^4}$ et $I=]2;+\infty[$

8) $f(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$ et $I=]0;+\infty[$

HIYAB

Résumé 5 : Primitives

Soient f et F deux fonctions définies sur un même intervalle I.

- On dit que F est une primitive de f sur I, si : F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive définie sur I.

Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.

- Les primitives de f sur I sont de la forme : $x \mapsto F(x) + c$ où c est une constante réelle.

Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$f(x)$	$F(x)$	I
0	c	$\mathbb{R}$
a	ax	$\mathbb{R}$
x^r $\quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$.	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$ln(\lvert x\rvert)$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$
$sin(x)$	$-cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$sin(x)$	$\mathbb{R}$
$1+tan^2(x)$	$tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ tel que $k \in \mathbb{Z}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonction primitives

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I.

Si u et v sont deux fonctions définies sur I alors

f	F	Conditions
$u'+v'$	$u+v$	• u et v sont dérivables sur I
$\alpha \times u'$	αu	• u est dérivable sur I
$u' \times v + u \times v'$	$u \times v$	• u et v sont dérivables sur I
$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	• u et v sont dérivables sur I • $(\forall x \in I) \quad v(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	• u est dérivable sur I • $(\forall x \in I) \quad u(x) \neq 0$
$u' \times u^r$ $\quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$.	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	• u^r est définie et dérivable sur I.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	• u est dérivable sur I • $(\forall x \in I) \quad u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$	$n\sqrt[n]{u}$	• u est dérivable sur I • $(\forall x \in I) \quad u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$ln(\lvert u\rvert)$	• u est dérivable sur I • $(\forall x \in I) \quad u(x) \neq 0$
$u'e^u$	e^u	• u est dérivable sur I

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BACSPF-2BACSVT	**Série 5** **Primitives**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1 :

On considère les fonctions f, F et G définies par : $f(x)=-\frac{1}{x^2}$, $F(x)=\frac{1}{x}+1$ et $G(x)=\frac{1}{x}-1$.

1) Vérifier que f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

2) Montrer que F est la primitive de f sur $]-\infty;0[$ s'annulant en un réel a que l'on précisera.

3) Montrer que G est la primitive de f sur $]0;+\infty[$ s'annulant en un réel b que l'on précisera.

Exercice 2 :

Déterminer la primitive F de f tel que $F(x_0)=y_0$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=3x^2\left(x^3+4\right)^2$; $\begin{cases}x_0=0\\y_0=1\end{cases}$.

2) $f(x)=(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^2$; $\begin{cases}x_0=1\\y_0=2\end{cases}$.

3) $f(x)=\frac{2}{(3x+1)^3}$; $\begin{cases}x_0=0\\y_0=\frac{2}{3}\end{cases}$.

4) $f(x)=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$; $\begin{cases}x_0=0\\y_0=0\end{cases}$.

5) $f(x)=sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; $\begin{cases}x_0=\frac{\pi}{2}\\y_0=0\end{cases}$.

6) $f(x)=\frac{x}{\left(x^2-2\right)^2}$; $\begin{cases}x_0=0\\y_0=1\end{cases}$.

7) $f(x)=\sqrt[3]{3x+2}$; $\begin{cases}x_0=2\\y_0=-1\end{cases}$.

8) $f(x)=\frac{2}{x^2}+x$; $\begin{cases}x_0=1\\y_0=-1\end{cases}$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x^3-11x^2+20x-10}{(x-2)^2}$.

1) Déterminer les réels a, b et c tel que : $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$.

2) En déduire une primitive de f sur $]2;+\infty[$.

Exercice 4 :

Déterminer les primitives F sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\sqrt{x+1}$ et $I=]0;+\infty[$.

2) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ et $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=(x-3)\sqrt{x^2-6x}$ et $I=[6;+\infty[$.

4) $f(x)=\left(x^2+1\right)^7\left(x+\frac{1}{2}\right)$ et $I=\mathbb{R}$.

5) $f(x)=\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{3+x}{2x}}$ et $I=]0;+\infty[$.

6) $f(x)=x(x+1)^{2024}$ et $I=\mathbb{R}$ (on pourra vérifier que : $f(x)=(x+1)^{2025}-(x+1)^{2024}$).

7) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ et $I=]1;+\infty[$ (on pourra écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x)=a\sqrt{x-1}+\frac{b}{\sqrt{x-1}}$, $a,b\in\mathbb{R}$).

Correction

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

1) Déterminer les réels a et b tel que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}$.

2) En déduire la primitive F de f sur $]-1;+\infty[$ tel que $F(1)=\frac{5}{2}$.

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL2

2BACSPF-2BACSVT
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Etude de fonctions)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

1) Etudier la continuité de f sur $[0;+\infty[$

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad f'(x)=2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$

b) Dresser le tableau de variations de f

c) Dresser le tableau de signe de f

d) Montrer que l'équation $f(x)=x-2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;4[$

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[4;+\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Dresser le tableau de variations de g^{-1}

c) Calculer $g(16)$ et déduire $\left(g^{-1}\right)'(64)$

Correction

5) a) Montrer que $(\forall x\in J):\ g^{-1}(x)=\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^2$

b) Déterminer par deux méthodes l'expression de $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in J$

6) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat obtenu graphiquement.

7) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un unique point d'inflexion I à déterminer.

8) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

9) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et la droite $(\Delta):y=x$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on donne $f(9)=9$

10) Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère précédent.

11) Résoudre graphiquement : $f(x)=x$; $f(x)\le x$ et $g^{-1}(x)=4$

Exercice 2 (Suites numériques)

Exercice 14 de la série 4

Exercice 3 (Primitives)

Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=8x^3-5x^2-3x+2$	2) $f(x)=\sqrt[3]{x+7}$	3) $f(x)=5\times\dfrac{1}{x}$	4) $f(x)=\dfrac{1}{x}\times ln(x)$
5) $f(x)=cos(x)sin^3(x)$	6) $f(x)=-tan^2(x)$	7) $f(x)=\dfrac{1}{3-4x}$	8) $f(x)=\dfrac{1}{x\times ln(x)}$
9) $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$	10) $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$	11) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+4}$	12) $f(x)=tan(x)$
13) $f(x)=\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}$	14) $f(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$	15) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{\left(x^3+x^2+5\right)^2}$	16) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS2

2BACSPF-A
2heures
Aissa HIYAB

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.

Exercice 1 (8pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{2}\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)$

1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ 0.5pt

b) En déduire la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ 0.5pt

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$ $\quad f(x)=\dfrac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$ 0.5pt

b) En déduire la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ 0.5pt

3) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{-\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)^2}{2\sqrt{x^2+4}}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ 1pt

b) Dresser le tableau de variations de f 0.5pt

4) Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 ..... 0.5pt

5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (T) dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ 2pt

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer 0.5pt

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ (remarquer que $0=f(0)$) 0.5pt

7) Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère précédent. 1pt

Exercice 2 (9pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$.

1) Vérifier que $u_{n+1}-1=\frac{1}{5}(u_n-1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ 0.5pt

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n>1$ 1.5pt

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante 1.5pt

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente 1pt

3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n=u_n-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ puis exprimer v_n en fonction de n. 2pt

b) Montrer que $u_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 1.5pt

4) On pose $w_n=\dfrac{5n+(-1)^n sin(n)}{n}$. Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad |w_n-5|\le\frac{1}{n}$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ 1pt

Exercice 3 (3pts)

Déterminer, dans chaque cas, une primitive F de f sur l'intervalle I.

1) $f(x)=x^2-4x+3$; $I=\mathbb{R}$ 1pt

2) $f(x)=\sqrt[3]{5x+2}$; $I=\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$ 1pt

3) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3x+2}}$; $I=\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ 1pt

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب
المديرية الإقليمية أيت ملول

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS2

2BACSPF-B
2heures
Aissa HIYAB

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.

Exercice 1 (8pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)$

1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ 0.5pt

b) En déduire la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ 0.5pt

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]-\infty;0[$ $f(x)=\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1}$ 0.5pt

b) En déduire la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ 0.5pt

3) a) Montrer que $f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)^2}{2\sqrt{x^2+4}}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ 1pt

b) Dresser le tableau de variations de f 0.5pt

4) Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 ..... 0.5pt

5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (T) dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ 2pt

6) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer 0.5pt

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ (remarquer que $0=f(0)$) 0.5pt

7) Tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère précédent. 1pt

Exercice 2 (9pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=11$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{10}{11}u_n+\frac{12}{11}$.

1) Vérifier que $u_{n+1}-12=\frac{10}{11}(u_n-12)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ 0.5pt

2) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $u_n<12$ 1.5pt

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante 1.5pt

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente 1pt

3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n=u_n-12$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis exprimer v_n en fonction de n. 2pt

b) Montrer que $u_n=12-\left(\frac{10}{11}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 1.5pt

4) On pose $w_n=\frac{(-1)^n\cos(n)+4n}{n}$. Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $|w_n-4|\le\frac{1}{n}$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ 1pt

Exercice 3 (3pts)

Déterminer, dans chaque cas, une primitive F de f sur l'intervalle I.

1) $f(x)=x^2+4x-3$; $I=\mathbb{R}$ 1pt

2) $f(x)=\sin(5x+2)$; $I=\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$ 1pt

3) $f(x)=\frac{2}{(3x+2)^3}$; $I=\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ 1pt

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب
ثانوية المجد التأهيلية أيت ملول

06

Fonctions logarithmes

HIYAB

1) Fonction logarithme népérienne

1-1-Définition-Dérivée-Monotonie-tableau de signe

Définition 1 :

La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1, on la note ***ln***.

Ensemble de définition de la fonction $x \to ln(x)$ est : $D_{ln} =]0;+\infty[$

Dérivée et monotonie :

- $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ (ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $x \mapsto ln(x)$ est dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- $ln(1) = 0$
- Tableau de variations et tableau de signe de la fonction ***ln*** :

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	‖	↗	0	↗	
$ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ \begin{cases} x > 1 \Leftrightarrow ln(x) > 0 \\ 0 < x < 1 \Leftrightarrow ln(x) < 0 \\ x = 1 \Leftrightarrow ln(x) = 0 \end{cases}$$

- L'équation $ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$, on la note e.
  Donc $ln(e) = 1$ (à l'aide d'une calculatrice $e \simeq 2{,}71$ et on a $e \notin \mathbb{Q}$)
- Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a : $ln(e^r) = r$

Remarque 1 : Résolution des équations et inéquations contenant *ln* :

- Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = ln(u(x))$. On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} /\ \ u(x) > 0\}$
- $(\forall X, Y \in]0;+\infty[)\ \ ln(X) = ln(Y) \Leftrightarrow X = Y$ et $(\forall X, Y \in]0;+\infty[)\ \ ln(X) > ln(Y) \Leftrightarrow X > Y$

Exemple 1 :

1) $ln(e^3) = ...$; $ln(\sqrt{e}) = ...$; $5 = ln(....)$; $ln(e^{-8}) = ...$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $ln(x) = 7$

Exemple 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $ln(x) = 2$; $ln^2(x) - 3ln(x) + 2 = 0$; $ln(x^2 - x) = ln(x+1)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $ln(x+5) < ln(3x+6)$; $ln^2(x) - 3ln(x) + 2 \leq 0$; $\frac{2 - ln(x)}{ln(x)} \leq 3$;

$ln(x) + ln(x-1) > ln(6)$

1-2-Les propriétés algébriques de la fonction *ln*

Propriétés 1 :

Soit a et b deux réels strictement positifs et r un nombre rationnel.

- $ln(ab) =$; • $ln(\frac{1}{a}) =$; • $ln(\frac{a}{b}) =$
- $ln(a^r) =$; • $ln(\sqrt{a}) =$; • $ln(a^2) =$

Exemple 3 :

Simplifier les expressions suivantes : $ln(2 \times 5)$; $ln(\sqrt{3})$; $ln(4e)$; $ln(x^2 y^3)$; $ln\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\right)$

Exemple 4 :

1) Calculer en fonction de $ln(2)$ et $ln(3)$ les nombres suivants :

$A = ln(6) + ln(8) + ln(72)$; $B = ln\left(\frac{1}{2}\right) - ln\left(\frac{3}{2}\right) + ln(\sqrt{6}) - ln(3\sqrt{2})$; $C = ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + ln\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$

2) On considère les nombres suivants : $E = ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln\left(\frac{2}{e}\right)$ et $F = ln\left(\left(7+4\sqrt{3}\right)^{15}\right) + ln\left(\left(7-4\sqrt{3}\right)^{15}\right)$

Montrer que $E = -1$ et $F = 0$

Remarque 2 :

$(\forall a,b\in]-\infty;0[)(\forall r\in\mathbb{Q})$: • $ln(ab)=ln(|a|)+ln(|b|)$; • $ln(\frac{a}{b})=ln(|a|)-ln(|b|)$; • $ln(a^r)=r\times ln(|a|)$

1-3-Limites de références - La courbe de la fonction *ln*

Propriétés 2 :

Soit n un entier naturel non nul :

• $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x)=-\infty$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x)=+\infty$	• $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ln(x)}{x-1}=1$
• $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n ln(x)=0^-$	• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x^n}=0^+$	• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$
• $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ ln(x)=0^-$	• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x}=0^+$	

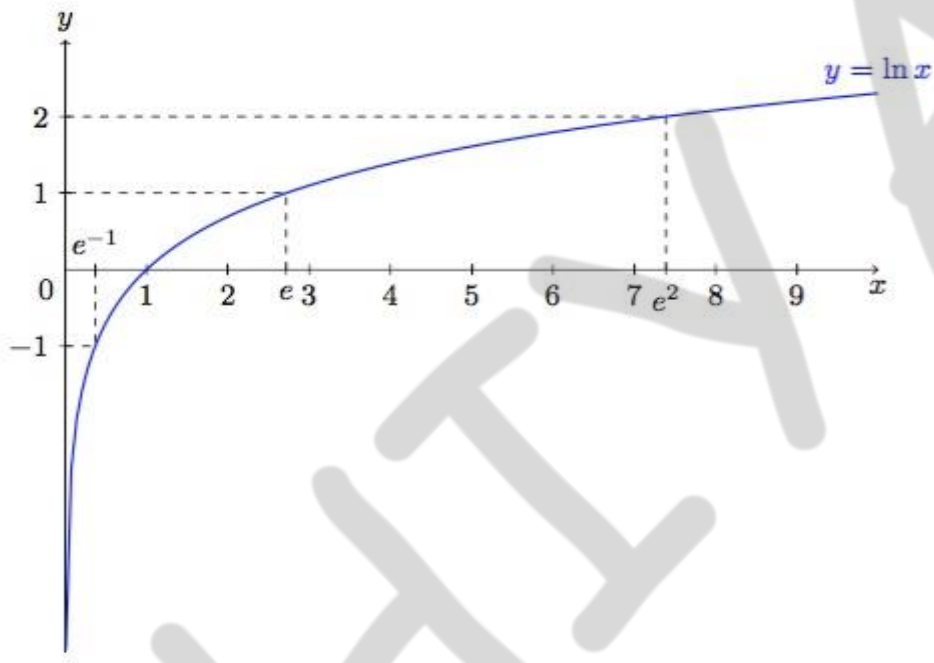
Exemple 5 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{ln(x)}+x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} sin(x)\times ln(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-2-\frac{ln(x)}{x^5}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{sin(x)}{ln(1+x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x)-3x$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ln(1+\sqrt[3]{x})}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x+\sqrt{x})}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(\frac{3x-2}{4x+1})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(\sqrt{x^2+3}-x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\times ln(x-2)$; $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\times ln(x^3-8)$; $\lim\limits_{x\to e}\frac{ln(x)-1}{x-e}$

Remarque 3 : La courbe de la fonction *ln*



الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

1-4-Dérivé de la fonction $x\mapsto ln(u(x))$ -Primitive de $\frac{u'}{u}$

Propriétés 3 :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,

- $\begin{cases} u \text{ est continue sur } I \\ (\forall x\in I)\ u(x)>0 \end{cases} \Rightarrow$ La fonction $x\mapsto ln(u(x))$ est continue sur I
- $\begin{cases} u \text{ est dérivable sur } I \\ (\forall x\in I)\ u(x)>0 \end{cases} \Rightarrow$ La fonction $x\mapsto ln(u(x))$ est dérivable sur I
- Si la fonction $x\mapsto ln(u(x))$ est dérivable sur I alors $(\forall x\in I)\ (ln(u(x)))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple 6 :

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants : $f(x)=ln(x^2-2x)$; $f(x)=ln(\sqrt{1-4x})$; $f(x)=\sqrt{1-ln^2(5x+1)}$; $f(x)=ln(\frac{2x+1}{x-3})$

Exemple 7 :

Montrer que la fonction f définie par $f(x)=\frac{3ln(x)+2}{ln(x)-1}$ est dérivable sur $I=]0;e[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$

Propriétés 4 :

Les primitives de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ sur un intervalle I inclus de $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions F définies sur I par :

$(\forall x \in I)\ F(x) = ln(|x|) + c \quad / c \in \mathbb{R}$

Propriétés 5 :

Soit u une fonction continue et ne s'annule pas sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (i.e $(\forall x \in I)\ u(x) \neq 0$)

Les primitives de la fonction $f: x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions F définies sur I par :

$(\forall x \in I)\ F(x) = ln(|u(x)|) + c \quad / c \in \mathbb{R}$

Exemple 8 :

Déterminer les primitives de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+4}$; $f(x) = \frac{1}{3-4x}$; $f(x) = 5 \times \frac{1}{x}$; $f(x) = \frac{1}{x} \times ln(x)$; $f(x) = \frac{1}{x \times ln(x)}$; $f(x) = tan(x)$

2) Logarithme de base a -Logarithme décimal

Définition 2 :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base a est la fonction numérique, notée par log_a définie sur $]0,+\infty[$ par : $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$

Remarque 4 :

La fonction Logarithme de base e est la fonction logarithme népérien car : $(\forall x > 0)$ $log_e(x) = \frac{ln(x)}{ln(e)} = ln(x)$

Propriétés 6 :

Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$

- $log_a(a) =$; • $log_a(1) =$; • $log_a(a^r) =$; • $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $log_e(x) =$; • $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $(log_a(x))' =$
- Si $a \in]0;1[$, alors la fonction log_a est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$
- Si $a \in]1;+\infty[$, alors la fonction log_a est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Propriétés 7 :

Pour tout réels strictement positifs x et y, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

• $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$ • $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$	• $log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -log_a(x)$ • $log_a(x^r) = r log_a(x)$

Exemple 9 :

1) On considère les nombres suivants : $A = log_4(2) + log_2(16) + log_8(4)$. Montrer que $A = \frac{31}{6}$

2) Simplifier le nombre $B = log_3(\frac{15}{4}) + log_2(\frac{1}{27}) + log_2(\frac{4}{5})$

Définition 3 : logarithme de base 10

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base 10 est appelée logarithme décimal. On la note log ; $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$

HTY AB
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Remarque 5 :

- $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad (log(x))' = \frac{1}{xln(10)}$; • La fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- $log(10) = 1$; • $(\forall r \in \mathbb{Q}) \ log(10^r) = r$

Exemple 10 :

Calculer les nombres suivants : $log(1000)$; $log(0.01)$; $log(100) + log(10^3) + log(\frac{1}{100})$

Exemple 11 :

Déterminer le plus petit entier naturel n dans les cas suivants : $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-5}$; $(1,1)^n \geq 100$; $\frac{1}{4^n} < 0,03$

Résumé 6 : Fonctions logarithmes

Logarithme népérien :

La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1, on la note ***ln***.

Propriétés :

- La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(\forall x \in]0;+\infty[) \begin{cases} x > 1 \Leftrightarrow ln(x) > 0 \\ 0 < x < 1 \Leftrightarrow ln(x) < 0 \\ x = 1 \Leftrightarrow ln(x) = 0 \end{cases}$.
- $(\forall X, Y \in]0;+\infty[) \quad ln(X) = ln(Y) \Leftrightarrow X = Y$
- $(\forall X, Y \in]0;+\infty[) \quad ln(X) > ln(Y) \Leftrightarrow X > Y$
- Soient x et y deux réels strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$ln(xy) = ln(x) + ln(y)$ $\qquad$ $ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$

$ln(\frac{1}{x}) = -ln(x)$ $\qquad$ $ln(x^r) = rln(x)$

Limites de référence :

Soit n un entier naturel non nul :

• $\lim\limits_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty$	• $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$
• $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n ln(x) = 0^-$	• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0^+$
• $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ ln(x) = 0^-$	• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0^+$

- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$

Propriétés :

La fonction $x \mapsto ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad (ln(x))' = \frac{1}{x}$.

- $\begin{cases} u \text{ est dérivable sur } I \\ (\forall x \in I) \ u(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ La fonction $x \mapsto ln(u(x))$ est dérivable sur I
- Si la fonction $x \mapsto ln(u(x))$ est dérivable sur I alors $(\forall x \in I) \ (ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Soit u une fonction continue et ne s'annule pas sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (i.e $(\forall x \in I) \ u(x) \neq 0$)

Les primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions F définies sur I par :

$(\forall x \in I) \ F(x) = ln(|u(x)|) + c \quad / c \in \mathbb{R}$

Fonction exponentielle de base a :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base a est la fonction numérique, notée par log_a définie sur $]0,+\infty[$ par :

$log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$

Propriétés :

Pour tout réels strictement positifs x et y, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

- $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$
- $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$
- $log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -log_a(x)$
- $log_a(x^r) = rlog_a(x)$

Logarithme de base 10

- Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base 10 est appelée logarithme décimal. On la note log ; $(\forall x \in]0;+\infty[)$

$log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$

- $log(10) = 1$; • $(\forall r \in \mathbb{Q}) \ log(10^r) = r$

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 2BACSPF-2BACSVT	**Série 6** **Fonctions logarithmes**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1 :

1)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

(E_1) : $ln(x-1)=ln(3-x)$ (E_2) : $ln(x^2+2x+2)=ln(4)$ (E_3) : $ln^2(x)+ln(x)-2=0$

2)- Résoudre, dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes suivants :

(S_1) : $\begin{cases} ln(x)-8ln(y)=-1 \\ 2ln(x)-5ln(y)=9 \end{cases}$ (S_2) : $\begin{cases} ln(x)-3ln(y)=5 \\ xy=e \end{cases}$

Exercice 2 :

1)- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

(I_1) : $ln(2x-1)\le 1$ (I_2) : $ln(x^2-x+1)>0$ (I_3) : $ln^2(x)+ln(x)-2\le 0$

2)- Déterminer la petite valeur de l'entier naturel n dans chacun des cas suivants :

(a) $3\times 2^n-5\ge 6$ (b) $\left(\frac{2}{5}\right)^n<0,001$ (c) $2024-\left(\frac{1}{3}\right)^n>2023,99$

Correction

3)- Montrer que : $log_2 7.log_3 7+log_3 7.log_5 7+log_5 7.log_2 7=\frac{log_2 7.log_3 7.log_5 7}{log_{30} 7}$

4)- Soient a un réel supérieur strictement à 1 et n un entier non nul.

Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $log_{a^n}(x)=\frac{1}{n}log_a(x)$

Exercice 3 :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1+ln^2(x)}{x}$

1)- Calculer $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2)- Vérifier que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $\frac{ln^2(x)}{x}=4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

4)- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\left(\frac{1-ln(x)}{x}\right)^2$.

5)- Dresser le tableau de variations de f

6)- Montrer que la fonction $F: x\mapsto \frac{1}{3}\left(ln^2(x)+3\right)ln(x)$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 4 :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=ln\left(x+\sqrt{x}\right)$

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis déduire une branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$

2)- Déterminer la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- Étudier les variations de f sur $]0,+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

4)- Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

6)- Construire la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 5 :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x\times ln(x+1)$

Partie I :

1)- Déterminer $f'(x)$, pour tout x de $[0,+\infty[$, puis déduire que f est croissante sur $[0,+\infty[$

2)- Étudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$, puis déterminer $f([0,e-1])$

3)- Montrer que : $f(x)\le x$, pour tout x de $[0,e-1]$

Partie II :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n\times ln(u_n+1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $0\le u_n\le e-1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3)- Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 6 :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-ln(x)$

1)- Calculer $f(1)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2)- Déterminer les deux branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

3)- Étudier la continuité de f sur $]0,+\infty[$.

4)- Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

5)- Dresser le tableau de variation de f, puis en déduire le signe de la fonction f.

6)- Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

7)- Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

8)- Montrer que la fonction $F:x\mapsto \dfrac{1}{2}x^2+x(1-ln(x))-3$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

9)- Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=\sqrt{3}$ et $u_{n+1}=u_n-ln(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer, par récurrence, que $1\le u_n\le 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c)- Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 7 :

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^3-1+2ln(x)$

1)- Calculer $g(1)$

2)- Déterminer $g'(x)$, pour tout x de $]0,+\infty[$, puis déduire le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$

3)- En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{ln(x)}{x^2}$

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis déduire une branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$

2)- Montrer que la première bissectrice du repère est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

4)- a)- Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

b)- Dresser le tableau de variations de f .

5)- a)- Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x)=\dfrac{5-6ln(x)}{x^4}$

b)- En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion A dont on déterminera ses coordonnées.

6)- Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 8 :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x^2-ln(2x-1)-1$

1)- Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

Correction

2)- Déterminer les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$

3)- a) -Montrer que : $\forall x \in D_f,\ f'(x)=\dfrac{2(x-1)(2x+1)}{2x-1}$.

b)- Dresser le tableau de variations de f .

c)- En déduire que : $\forall x \in \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[,\ ln(2x-1)\le x^2-1$

4)- Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5)- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Construire $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6)- On considère la fonction numérique h définie par : $h(x)=x^2-ln(2|x|-1)-1$.

a)- Montrer que la fonction h est paire.

b)- Construire $(\mathcal{C}_h)$ la courbe représentative de h dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 9 :

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $]1,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{x}{x-1}+ln(x-1)$

1)- Déterminer $g'(x)$, pour tout x de $]1,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $]1,+\infty[$

2)- En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=x\times ln(x-1)$

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2)- Déterminer la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

3)- Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.

4)- a)- Montrer que : $\forall x \in]1,+\infty[,\ f'(x)=g(x)$.

b)- Dresser le tableau de variations de f .

5)- Montrer que le point $I(2;0)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$

6)- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point I

7)- Construire la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

8)- a)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b)- Montrer que f^{-1} est dérivable en 0, puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

9)- Construire la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

HTAB
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

07

Les nombres complexes

HIYAB

Partie 1 : Généralités-Affixe-Figures remarquables

1) Forme algébrique - Conjugué d'un nombre complexe

Introduction :

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, vérifiant : $i^2 = -1$,
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

A retenir 1 :

Tout nombre complexe z s'écrit d'une façon unique sous la forme $z = x + iy$, avec x et y sont deux réels.

- L'écriture $z = x + iy$ tel que $x; y \in \mathbb{R}$ est appelée **la forme algébrique** de z
- On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = x - iy$

  Ainsi $\boxed{z = x + iy \Leftrightarrow \bar{z} = x - iy}$

Remarque 1 :

Soit $z = x + iy$ la forme algébrique d'un nombre complexe z

- Le réel x est appelé la **partie réelle** de z, et noté $Re(z) = x$
- Le réel y est appelé la **partie imaginaire** de z, et noté $Im(z) = y$
- Si $Im(z) = 0$, alors $z = x$ est réel.
- Si $Re(z) = 0$, alors $z = iy$ et, dans ce cas, on dit que z est **imaginaire pur**.
- L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$ (Egalité de deux nombres complexes)

Exemple 1 :

Déterminer le conjugué du nombre complexe $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) Module-Argument-Forme trigonométrique et exponentielle

A retenir 2 :

Soit $z \in \mathbb{C}$

- On appelle **module** de z le réel positif noté $|z|$ définie par $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- Si $z = x + iy$ est la forme algébrique de z alors $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

Exemple 2 :

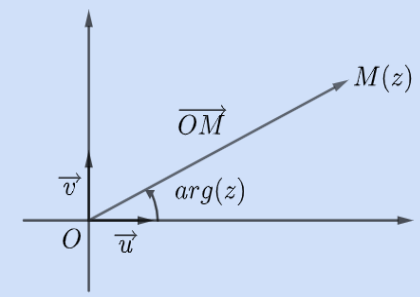
Déterminer le module du nombre complexe z_1

A retenir 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit $z = x + iy$ (où $x; y \in \mathbb{R}$) un nombre complexe.

Soit M le point de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$



- Le nombre $z = x + iy$ est appelé **l'affixe** du point M. On le note $aff(M)$ ou z_M.

  On écrit $M(z_M)$
- Le module de z est la distance OM : $|z| = OM$
- Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors toute mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u}; \widehat{\vec{OM}})$ est appelée un **argument** de z.

On le note $arg(z)$ et on écrit $arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

- Si $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z alors : $\boxed{cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|}}$ et $\boxed{sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}}$

Exemple 3 :

Déterminer un argument du nombre complexe z_1

Rappel :

Si θ est un réel tel que $\theta \in [-\pi;2\pi]$ alors :

$$\begin{cases} cos(\theta)=\frac{1}{2} \\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=\frac{1}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{1}{2} \\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi-\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{1}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta)=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{6} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{6} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta)=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi-\frac{\pi}{6} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi+\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{4} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi-\frac{\pi}{4} \quad ; \quad \begin{cases} cos(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta=\pi+\frac{\pi}{4}$$

A retenir 4 :

- Toute nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $z=r\left(cos(\theta)+isin(\theta)\right)$ tel que $r=|z|$ et θ un argument de z
- L'écriture $\boxed{z=r\left(cos(\theta)+isin(\theta)\right)}$ tel que $r=|z|$ et $arg(z)\equiv\theta[2\pi]$ est appelée une **forme trigonométrique** de z

Démonstration :

Soit $z=x+iy$ la forme algébrique d'un nombre complexe non nul z

On a $z=x+iy$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$=r\left(cos(\theta)+isin(\theta)\right)$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$, $cos(\theta)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{Re(z)}{|z|}$ et $sin(\theta)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{Im(z)}{|z|}$

Exemple 4 : Donner une forme trigonométrique de z_1

A retenir 5 :

- Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\boxed{e^{i\theta}=cos(\theta)+isin(\theta)}$
- Soit z un nombre complexe non nul.

L'écriture $\boxed{z=re^{i\theta}}$ tel que $r=|z|$ et $arg(z)\equiv\theta[2\pi]$ est appelée **la notation exponentielle** de z ou l'écriture exponentielle de z

Exemple 5 :

1) Donner la notation exponentielle de z_1

2) Donner par deux méthodes une forme trigonométrique et la notation exponentielle de $z_2=-1-i$

Remarque 2 :

$$1=e^{i0} \quad ; \quad -1=e^{-i\pi} \quad ; \quad -i=e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad -i=e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{4}}$$

A retenir 6 : Les propriétés du conjugué :

Soit $z,z'\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{Z}$ on a :

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$	$z+\bar{z}=2Re(z)$
$\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$	$z-\bar{z}=2iIm(z)$
$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$; $z\neq 0$	$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=z$
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; $z'\neq 0$	$z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=-z$
$\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$; $z\neq 0$	$\lvert\bar{z}\rvert=\lvert z\rvert$
	$arg(\bar{z})\equiv -arg(z)[2\pi]$

HTYAD
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exemple 6 :

Déterminer le conjugué du nombre complexe $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

A retenir 7 : Les propriétés du module :

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	$\lvert z \rvert \in \mathbb{R}^+$; $\lvert z \rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$
$\left\lvert \dfrac{1}{z} \right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z \rvert}$; $z \neq 0$	$\lvert z \rvert = \lvert \bar{z} \rvert = \lvert -z \rvert = \lvert -\bar{z} \rvert$
$\left\lvert \dfrac{z}{z'} \right\rvert = \dfrac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$; $z' \neq 0$	$z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \lvert z \rvert = z$
$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$; $z \neq 0$	$z \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \lvert z \rvert = -z$
	$\lvert z + z' \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$ (Inégalité triangulaire)

Exemple 7 :

Déterminer le module de z_3

A retenir 8 : Les propriétés de l'argument :

Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$arg(z \times z') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$	$z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow arg(z) \equiv 0[2\pi]$	$z \in i\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$	$arg(-z) \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$
$arg(\dfrac{1}{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$	$z \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow arg(z) \equiv \pi[2\pi]$	$z \in i\mathbb{R}^- \Leftrightarrow arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$	$arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$
$arg(\dfrac{z}{z'}) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$			
$arg(z^n) \equiv n \cdot arg(z)[2\pi]$	$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow arg(z) \equiv 0[\pi]$	$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$	

Exemple 8 :

1) a) Déterminer un argument de z_3 et déduire une forme trigonométrique de z_3

b) Ecrire z_3 sous la forme algébrique

c) En déduire que $cos(\dfrac{\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin(\dfrac{\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) On pose $z_4 = (1+i)^{2026}$. Déterminer $\bar{z_4}$, $\lvert z_4 \rvert$, $arg(z_4)$, une forme trigonométrique de z_4 et la notation exponentielle de z_4

A retenir 9 : Les propriétés de $e^{i\theta}$:

Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$	$\lvert e^{i\theta} \rvert = 1$;
$\dfrac{1}{e^{i\theta}} \equiv e^{-i\theta}$	$arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi]$
$\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}} \equiv e^{i(\theta-\theta')}$	$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
$(e^{i\theta})^n \equiv e^{in\theta}$	$-e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$

Exemple 8 :

1) On pose $z_5 = (1+i)e^{i\frac{3\pi}{5}}$. Déterminer $\bar{z_5}$, $\lvert z_5 \rvert$ et $arg(z_5)$

2) On pose $z_6 = -7e^{i\frac{\pi}{6}}$. Déterminer $\bar{z_6}$, $\lvert z_6 \rvert$ et $arg(z_6)$

Remarque 3 :

$cos(\theta) + isin(\theta) = e^{i\theta}$; $cos(\theta) - isin(\theta) = e^{-i\theta}$; $-cos(\theta) + isin(\theta) = e^{i(\pi-\theta)}$; $-cos(\theta) - isin(\theta) = e^{i(\pi+\theta)}$

$sin(\theta) + icos(\theta) = cos(\dfrac{\pi}{2} - \theta) + isin(\dfrac{\pi}{2} - \theta) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$sin(\theta) - icos(\theta) = \overline{sin(\theta) + icos(\theta)} = \overline{cos(\dfrac{\pi}{2} - \theta) + isin(\dfrac{\pi}{2} - \theta)} = \overline{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}} = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$-sin(\theta) + icos(\theta) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

$-sin(\theta) - icos(\theta) = e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

3) Affixe d'un vecteur-figures remarquables

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

A retenir 10 : Affixe d'un vecteur-Points alignés

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points du plan complexe.

- L'affixe du A point est z_A : $aff(A)=z_A$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est z_B-z_A, on écrit $aff(\overrightarrow{AB})=z_B-z_A$ ou $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
- Si les points A, B et C sont distincts alors :

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R}$

Exemple 9 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $a=-3i$; $b=1-i$; $c=2+i$

Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Remarque 4 :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow z_B-z_A=z_C-z_D$

A retenir 11 : Distance-mesure d'un angle-orthogonalité-parallélisme

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe.

- $AB=|z_B-z_A|$
- $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})\equiv arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- $(AB)\perp(CD)\Leftrightarrow \dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}$
- $(AB)\parallel(CD)\Leftrightarrow \dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

Exemple 10 :

On considère les points $A(2+3i)$; $B(-1)$; $C(1+7i)$ et $D(2+6i)$. Montrer que $(AB)\perp(CD)$

Exemple 11 :

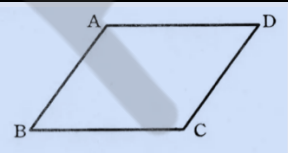
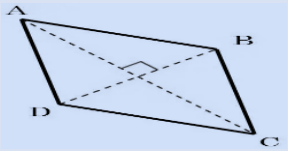
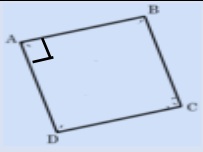
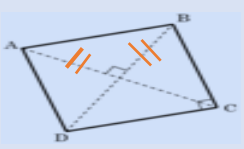
On considère les points : $A(1+4i)$; $B(i)$; $C(1+i)$ et $D(-2-8i)$. Montrer que $(AB)\parallel(CD)$

Remarque 5 : Milieu d'un segment

Le point I est le milieu du segment $[AB]\Leftrightarrow \boxed{z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}}$

A retenir 12 : Quadrilatères remarquables

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On pose : $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$

	$ABCD$ est un parallélogramme	$ABCD$ est un losange	$ABCD$ est un carré
Figure			 ou 
Signification	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$	$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\(AC)\perp(DB)\end{cases}$	$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\AB=AD\\(AB)\perp(AD)\end{cases}$ ou $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\AC=DB\\(AC)\perp(DB)\end{cases}$
Démonstration complexe	$z_B-z_A=z_C-z_D$	$\begin{cases}z_B-z_A=z_C-z_D\\\dfrac{z_B-z_D}{z_C-z_A}\in i\mathbb{R}\end{cases}$	$\begin{cases}z_B-z_A=z_C-z_D\\\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\pm i\end{cases}$ ou $\begin{cases}z_B-z_A=z_C-z_D\\\dfrac{z_B-z_D}{z_C-z_A}=\pm i\end{cases}$

Exemple 12 :

On considère les points $A(1+2i)$; $B(-1+5i)$; $C(2+i)$ et $D(4-2i)$

1) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

2) Déterminer l'affixe du point H le centre de $ABCD$

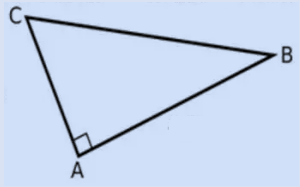
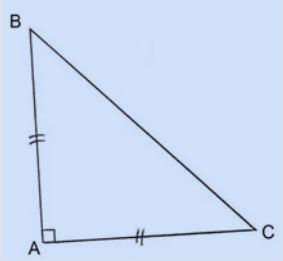
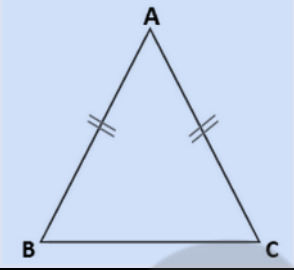
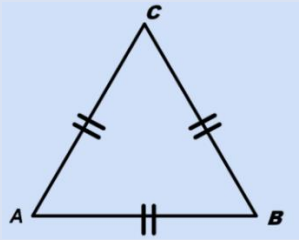
Exemple 13 :

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs $a=\sqrt{3}$; $b=2+i\sqrt{3}$; $c=2-\sqrt{3}+2i$ et $d=(2-\sqrt{3})i$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

A retenir 13 : Triangles remarquables

Soit ABC un triangle. On pose : $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$

	ABC est rectangle en A	ABC est rectangle et isocèle en A	ABC est isocèle en A	ABC est équilatéral
Figure				
Signification	$(AC)\perp(AB)$	$\begin{cases}(AC)\perp(AB)\\AC=AB\end{cases}$	$AC=AB$	$AC=AB=BC$ Ou $\begin{cases}AC=AB\\(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\pm\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$
Démonstration complexe	$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in i\mathbb{R}$	$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\pm i$	$\lvert z_B-z_A\rvert=\lvert z_C-z_A\rvert$	$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

Exemple 12 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $a=9+i$; $b=9-i$; $c=11-i$

Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

A retenir 14 : Barycentre-Centre de gravité

Soit A et B deux points distinct du plan d'affixes respectives z_A et z_B

Soit a et b deux réels tel que $a+b\neq 0$

- Il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Le point G est appelé le **barycentre** des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$

On dit aussi que G est le barycentre du système $\{(A;a);(B;b)\}$, on écrit $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$

Ainsi : $G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

- L'affixe du point G tel que $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$ est $z_G=\frac{az_A+bz_B}{a+b}$
- Si ABC est un triangle de centre de gravité G alors $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$

Exemple 13 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $a=3+3i$; $b=5-2i$; $c=7+11i$

Déterminer l'affixe du point G le centre de gravité du triangle ABC.

Remarque 6 :

L'affixe du point G tel que $G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ est $z_G=\frac{az_A+bz_B+cz_c}{a+b+c}$

A retenir 15 : Points cocycliques

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points non alignés du plan complexe.

Les points A, B, C et D sont cocycliques (appartenant au même cercle) si, et seulement si $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\in\mathbb{R}$

Exemple 14 :

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs $a=1+i\sqrt{3}$; $b=-1-i\sqrt{3}$; $c=2(-1+i\sqrt{3})$ et $d=-1+i\sqrt{3}$

Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

HTY AB
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Partie 2 : Equations-Transformations-Linéarisation

1) Equation de second degré dans $\mathbb{C}$

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Définition et propriété 1 :

Soit a un réel non nul.

- On dit qu'un nombre complexe z est **une racine carrée** de a si $z^2 = a$
- Si $a > 0$ alors les racines carrées de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a < 0$ alors les racines carrées de a sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$

Remarque 1 :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Exemple 1 :

- Les racines carrées de 3 sont…….
- Les racines carrées de -7 sont…….
- Les racines carrées de -1 sont…….

Propriété 2 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnu z où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E) et S son ensemble de solutions dans $\mathbb{C}$

	Si $\Delta > 0$	Si $\Delta < 0$	Si $\Delta = 0$
Solution	$z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$z_0 = \dfrac{-b}{2a}$
Ensemble de solutions dans $\mathbb{C}$	$S = \{z_1; z_2\}$	$S = \{z_1; z_2\}$	$S = \{z_0\}$
Somme et produit des solutions	$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$; $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$		
Factorisation de $az^2 + bz + c$	$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$		$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$(E_1) : z^2 + 2z + 5 = 0$; $(E_2) : 5z^2 - 7z + 3 = 0$; $(E_3) : 3z^2 + 4z + 2 = 0$; $(E_4) : z^2 - 6z + 34 = 0$; $(E_5) : z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$;

$(E_6) : z^2 + 2\sqrt{5}z + 7 = 0$; $(E_7) : z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$; $(E_8) : 4z^2 - 4z + 1 = 0$

2) Transformations usuelles

2-1 Translation

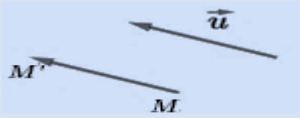
Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

La **translation** de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

On dit que M' est l'image de M par la translation du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $t_{\vec{u}}(M) = M'$.

Ainsi $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$



Propriété 3 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, b son affixe et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Pour tous points $M(z)$ et $M'(z')$ on a : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow z' = z + b$

La relation $z' = z + b$ s'appelle **l'écriture (ou l'expression) complexe** de la translation $t_{\vec{u}}$

Exemple 3 :

Soit A le point d'affixe $a = 3 + 5i$ et $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $b = 4 - 2i$

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$

1) Donner l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$

2) Déterminer l'affixe du point B l'image de A par $t_{\vec{u}}$

2-2 Homothétie

Définition :

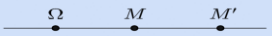
Soit Ω un point du plan et k un réel non nul.

La transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ s'appelle **l'homothétie** de centre Ω et de rapport k.

On dit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k, on écrit :

$h_{(\Omega;k)}(M) = M'$ ou $h(M) = M'$

Ainsi : $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$



Propriété 4 :

Soit h l'homothétie de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de rapport k

Pour tous points $M(z)$ et $M'(z')$ on a : $h(M) = M' \Leftrightarrow z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$

La relation $z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$ s'appelle **l'écriture complexe** de l'homothétie h

Exemple 4 :

Soit h l'homothétie de centre $\Omega(-2+i)$ et de rapport $k = -\frac{1}{2}$

1) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h

2) Déterminer l'affixe du point B l'image du point $N\left(-\frac{3}{2} - 2i\right)$ par l'homothétie h

2-3 Rotation

Définition :

Soit Ω un point fixe du plan et θ un nombre réel.

La rotation de centre Ω et d'angle θ est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$; Si $M \neq \Omega$ alors $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$

On la note $R(O;\alpha)$ ou R. Et on écrit $R(M) = M'$

Ainsi si $M \neq O$ alors : $R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$

Propriété 5 :

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle θ

Pour tous points $M(z)$ et $M'(z')$ on a : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

La relation $z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$ s'appelle **l'écriture complexe** de la rotation R

Exemple 5 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $a = 4 + 4i$; $b = 3 + 5i$; $c = 3 + 4i$

Soit $M'(z')$ l'image du point $M(z)$ par la rotation r de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $z' = iz + 7 + i$

2) Vérifier que B est l'image de A par la rotation r.

3) En déduire la nature du triangle ABC.

Remarque 2 :

Réciproquement, toute transformation plane d'écriture complexe $z' = az + b$, avec a non nul, est :

- une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b, si $a = 1$;
- une homothétie de rapport a, si a est un réel non nul différent de 1 ;
- une rotation d'angle $arg(a)$, si a est un nombre complexe non réel de module 1.

Dans les deux derniers cas, z_Ω l'affixe du centre Ω vérifie l'égalité : $z_\Omega = az_\Omega + b$

Exemple 6 :

Déterminer la nature de la transformation plane et ses éléments caractéristiques qui à tout point M d'affixe z associé le point M' d'affixe z' dans chacun des cas suivants :

1) $z' = z + 2 - i$ 2) $z' = 2z - 1 + 3i$ 3) $z' = iz - 2$

3) Linéarisation

Activité :

1) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}$ on a : $\dfrac{e^{iX}+e^{-iX}}{2} = cos(X)$

2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $cos^2(x) = \dfrac{1}{2}cos(2x) + \dfrac{1}{2}$

→ L'expression $\dfrac{1}{2}cos(2x)+\dfrac{1}{2}$ est appelé **linéarisation** de $cos^2(x)$

Propriétés 6 :

Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n on a :

- Formule de Moivre : $(cos(\theta)+isin(\theta))^n = cos(n\theta)+isin(n\theta)$
- Formules d'Euler $cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Exemple 7 :

1) Linéariser $cos^3(x)$, $sin^3(x)$ et $sin(2x)\times cos^3(5x)$

2) A l'aide des formules d'Euler montrer que : $cos(a)\times sin(b) = \dfrac{1}{2}[sin(a+b)-sin(a-b)]$

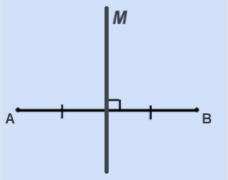
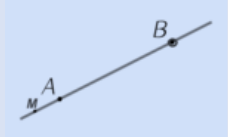
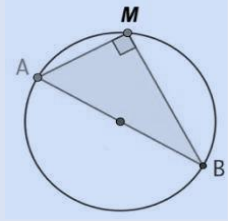
3) a) En utilisant les formules d'Euler, montrer que : $e^{i\theta}+e^{i\theta'} = 2cos\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$ et $e^{i\theta}-e^{i\theta'} = 2i\times sin\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$

b) En déduire la notation exponentielle des nombres suivants : $z_9 = e^{i\frac{5\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_{10} = 1-e^{i\frac{\pi}{3}}$

4) Ensembles des points remarquables

Propriété 7 :

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points distincts du plan et R un réel strictement positif.

L'ensemble des points M du plan tel que	Signification géométrique	Nature	
$\lvert z-z_A\rvert = R$	$AM = R$	Le cercle du centre A et de rayon R	
$\lvert z-z_A\rvert = \lvert z-z_B\rvert$	$AM = BM$	La médiatrice du segment $[AB]$	
$\dfrac{z-z_A}{z-z_B} \in \mathbb{R}$	Les points M, A et C sont alignés et $M \neq B$	La droite (AB) privée du point B	
$\dfrac{z-z_A}{z-z_B} \in i\mathbb{R}$	$(AM)\perp(BM)$ et $M \neq B$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B	

Exemple 8 :

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe dans les cas suivants :

$\lvert z-3+2i\rvert = 5$; $\dfrac{z-2i}{z-3} \in \mathbb{R}$; $\dfrac{z-4+2i}{z+3i} \in i\mathbb{R}$; $\lvert z+2-7i\rvert = \lvert z-4+i\rvert$; $\dfrac{1-iz}{1+z} \in i\mathbb{R}$; $\dfrac{z-1}{iz} \in i\mathbb{R}$; $\lvert\bar{z}-3+2i\rvert = 5$;

$\dfrac{\bar{z}-2i}{\bar{z}-3} \in \mathbb{R}$; $\dfrac{\bar{z}-4+2i}{\bar{z}+3i} \in i\mathbb{R}$

Résumé 7 : Les nombres complexes

Conjugué d'un nombre complexe

- L'écriture $z=x+iy$ tel que $x;y\in\mathbb{R}$ est appelée **la forme algébrique** de z
- On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z}=x-iy$

Propriétés

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$	$z+\bar{z}=2Re(z)$
$\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$	$z-\bar{z}=2iIm(z)$
$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$; $z\neq 0$	$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=z$
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; $z'\neq 0$	$z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=-z$
$\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$; $z\neq 0$	$\lvert\bar{z}\rvert=\lvert z\rvert$
	$arg(\bar{z})\equiv -arg(z)[2\pi]$

Module d'un nombre complexe

- $\lvert z\rvert=\sqrt{z\bar{z}}$
- Si $z=x+iy$ est la forme algébrique de z alors

$\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$

Propriétés

$\lvert z\times z'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$	$\lvert z\rvert\in\mathbb{R}^+$; $\lvert z\rvert=0\Leftrightarrow z=0$
$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert=\frac{1}{\lvert z\rvert}$; $z\neq 0$	$\lvert z\rvert=\lvert\bar{z}\rvert=\lvert -z\rvert=\lvert -\bar{z}\rvert$
$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert=\frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$; $z'\neq 0$	$z\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow\lvert z\rvert=z$
$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$; $z\neq 0$	$z\in\mathbb{R}^-\Leftrightarrow\lvert z\rvert=-z$
	$\lvert z+z'\rvert\leq\lvert z\rvert+\lvert z'\rvert$

Interprétation géométrique -Argument

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soit M le point d'affixe $z=x+iy$ (où $x;y\in\mathbb{R}$)

- Le module de z est la distance OM : $\lvert z\rvert=OM$
- Si $z\in\mathbb{C}^*$ alors $arg(z)\equiv\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$
- Si $z\in\mathbb{C}^*$ et θ un argument de z alors :

$cos(\theta)=\frac{Re(z)}{\lvert z\rvert}$ et $sin(\theta)=\frac{Im(z)}{\lvert z\rvert}$

Les propriétés de l'argument :

$$arg(z\times z')\equiv arg(z)+arg(z')[2\pi]$$

$$arg(\frac{1}{z})\equiv -arg(z)[2\pi]$$

$$arg(\frac{z}{z'})\equiv arg(z)-arg(z')[2\pi]$$

$$arg(z^n)\equiv n\cdot arg(z)\,[2\pi]$$

$z\in\mathbb{R}^{*+}\Leftrightarrow arg(z)\equiv 0[2\pi]$	$z\in i\mathbb{R}^{*+}\Leftrightarrow arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
$z\in\mathbb{R}^{*-}\Leftrightarrow arg(z)\equiv\pi[2\pi]$	$z\in i\mathbb{R}^{*-}\Leftrightarrow arg(z)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$
$z\in\mathbb{R}^{*}\Leftrightarrow arg(z)\equiv 0[\pi]$	$z\in i\mathbb{R}^{*}\Leftrightarrow arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

Forme trigonométrique

- L'écriture $z=r\left(cos(\theta)+isin(\theta)\right)$ tel que $r=\lvert z\rvert$ et $arg(z)\equiv\theta[2\pi]$ est appelée une **forme trigonométrique** de z

Notation exponentielle

L'écriture $z=re^{i\theta}$ tel que $r=\lvert z\rvert$ et $arg(z)\equiv\theta[2\pi]$ est appelée **la notation exponentielle** de z ou l'écriture exponentielle de z

Les propriétés de $e^{i\theta}$:

Soit $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta}=cos(\theta)+isin(\theta)$

$e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$	$\lvert e^{i\theta}\rvert=1$;
$\frac{1}{e^{i\theta}}\equiv e^{-i\theta}$	$arg(e^{i\theta})\equiv\theta[2\pi]$
$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}}\equiv e^{i(\theta-\theta')}$	$\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$
$\left(e^{i\theta}\right)^n\equiv e^{in\theta}$	$-e^{i\theta}=e^{i(\pi+\theta)}$

Propriétés

- $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow\frac{z_B-z_A}{z_c-z_A}\in\mathbb{R}$
- $AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- $(AB)\perp(CD)\Leftrightarrow\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}$
- $(AB)\parallel(CD)\Leftrightarrow\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$
- Si $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$ a lors $z_G=\frac{az_A+bz_B}{a+b}$
- Si G est le centre de gravité de ABC alors

$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$

Points cocycliques

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points non alignés du plan complexe.

Les points A, B, C et D sont cocycliques (appartenant au même cercle) si, et seulement si $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\in\mathbb{R}$

Ensembles des points remarquables

L'ensemble des points M du plan tel que	Nature
$\lvert z-z_A\rvert=R$	Le cercle du centre A et de rayon R
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	La médiatrice du segment $[AB]$
$\frac{z-z_A}{z-z_B}\in\mathbb{R}$	La droite (AB) privée du point B
$\frac{z-z_A}{z-z_B}\in i\mathbb{R}$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Quadrilatères remarquables

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On pose : $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$

	$ABCD$ est un parallélogramme	$ABCD$ est un losange	$ABCD$ est un carré
Démonstration complexe	$z_B - z_A = z_C - z_D$	$\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \dfrac{z_B - z_D}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \end{cases}$ ou $\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \dfrac{z_B - z_D}{z_C - z_A} = \pm i \end{cases}$

Triangles remarquables

Soit ABC un triangle. On pose : $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$

	ABC est rectangle en A	ABC est rectangle et isocèle en A	ABC est isocèle en A	ABC est équilatéral
Démonstration complexe	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}$	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i$	$\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert z_C - z_A \rvert$	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

Equation de second degré dans C

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnu z où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E) et S son ensemble de solutions dans $\mathbb{C}$

	Si $\Delta > 0$	Si $\Delta < 0$	Si $\Delta = 0$
Solution	$z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$z_0 = \dfrac{-b}{2a}$
Ensemble de solutions dans $\mathbb{C}$	$S = \{z_1; z_2\}$	$S = \{z_1; z_2\}$	$S = \{z_0\}$
Somme et produit des solutions	$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$; $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$		
Factorisation de $az^2 + bz + c$	$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$		$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$

Écritures (ou représentations) complexes des transformations usuelles

Soit T une transformation plane qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$.

Donner l'écriture complexe de T consiste à exprimer z' en fonction de z

Transformation plane et ses éléments caractéristiques	Définition géométrique	Écriture complexe
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, b son affixe et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$:	$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
h l'homothétie de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de rapport k :	$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$
R la rotation de centre Ω et d'angle θ :	$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases}$	$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

Exercice 1 :

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $z_1=\dfrac{1}{7-4i}$; $z_2=\dfrac{1+i}{3+2i}$; $z_3=\left(3-\sqrt{2}i\right)^2$; $z_4=i^{2028}$; $z_5=\dfrac{1+i}{1-i}$; $z_6=\dfrac{1}{1-i}+\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{i}{2}$; $z_7=\dfrac{(1-2i)^3-(1-i)^3}{(1+3i)^3+(1+i)^2}$

Exercice 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-z+1=0$.

2) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points d'affixes respectives A , B et C, tel que : $z_A=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_B=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_C=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

On désigne par A' l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'affixe de A' et montrer que le triangle $A\,A'C$ est isocèle en A .

3) On désigne par B' l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

a) Exprimer l'affixe $z_{B'}$ en fonction de z_B .

b) En déduire une forme trigonométrique de $z_{B'}$

c) Déterminer la forme algébrique de $z_{B'}$

d) En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 3 : *(Session normale 2016)*

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-4z+29=0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et Ω d'affixes respectives a , b et ω telles que : $a=5+2i$; $b=5+8i$ et $\omega=2+5i$

a) Considérons $u=b-\omega$. Vérifier que $u=3+3i$, puis montrer que $arg(u)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Déterminer un argument du nombre $\overline{u}$.

c) Vérifier que: $a-\omega=\overline{u}$, en déduire que $\Omega A=\Omega B$ et que $arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

d) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par la rotation R.

Exercice 4 : *(Session normale 2019)*

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+4=0$.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives : $a=1-i\sqrt{3}$; $b=2+2i$; $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$

a) Vérifier que : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$.

b) En déduire que A , C et D sont alignées.

3) On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe M' l'image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ .Vérifier que $z'=\dfrac{1}{2}az$

4) Soit $H(h)$ l'image du point B par la rotation R, et le point $P(p)$, tel que $p=a-c$

a) Vérifier que : $h=ip$.

b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

Exercice 5 :

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a=1$; $b=3+4i$; $c=2\sqrt{3}+i(-2-\sqrt{3})$ et $d=-2\sqrt{3}+i(-2+\sqrt{3})$.

L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1) a) Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est le point D.

b) En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.

2) Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

a) Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

b) Montrer que le point F est le milieu de $[CD]$.

c) Montrer que $\dfrac{c-z_F}{a-z_F}=-i\sqrt{3}$.

d) En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{c-z_F}{a-z_F}$.

3) Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

Correction

Exercice 6 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

1) $|z-1+2i|=4$ 2) $|z-2+i|=|z+2-2i|$

3) $|iz-2+i|=6$ 4) $|\overline{z}-1+2i|=|z-3-i|$

5) $z\overline{z}+i(z-\overline{z})=-1$ 6) $arg(z)=\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

Exercice 7 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+2=0$

2) On pose $a=1-i$ et $b=2+\sqrt{3}+i$

a) Écrire a sous forme trigonométrique

b) Vérifier que $\frac{b}{a}=\left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ puis écrire b sous forme trigonométrique

c) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

d) En déduire $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

e) Déduire que b^6 est un nombre imaginaire pur.

3) On considère les points A, B et C d'affixes a, b et $c=-1+i\sqrt{3}$

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation $R_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$

a) Exprimer z' en fonction de z

b) Vérifier que le point C est l'image du point B par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC

4) Soit (E) l'ensemble des points $M(z)$ tel que $\left|z-2-\sqrt{3}-i\right|=\left|z+1-i\sqrt{3}\right|$

a) Déterminer l'ensemble (E).

b) En déduire que le milieu du segment $[BC]$ appartient à l'ensemble (E)

Exercice 8 :

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-6z+10=0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes $a=4$ et $b=3-i$

a) Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Montrer que $z'=-iz+4+4i$

b) Vérifier que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c=3+i$

c) En déduire la nature du triangle ABC

3) Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et D l'image du point C par la translation t

a) Déterminer d l'affixe du point D

b) En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$

c) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $|z-3-i|=|3+i|$

Correction

Exercice 9 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-4z+16=0$

2) Dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$,on considère les points A et B d'affixes respectives $a=2-2\sqrt{3}i$ et $b=2\sqrt{3}+2i$.

a) Ecrire a et b sous forme trigonométrique, et vérifier que a^{21} est un nombre réel.

b) Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

3) a) Déterminer l'affixe du point E l'image du point A par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

b) Montrer que $OAEB$ est un carré.

4) On considère la rotation R de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$

a) Montrer que : $z'=-iz+2\sqrt{3}-2+\left(2+2\sqrt{3}\right)i$

b) Déduire que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R est $c=-2+2\sqrt{3}i$

5) Soit le point D d'affixe $d=6+2\sqrt{3}i$

a) Montrer que les points O, B et D sont alignés.

b) Montrer que $\frac{d-c}{a-c}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, puis en déduire que ADC est un triangle équilatéral.

Exercice 10 :

f la transformation du plan qui à M d'affixe z associe M' d'affixe z' tel que : $z' = 4z + 6 - 3i$.

Déterminer l'unique point invariant de f et en déduire la nature et les éléments caractéristique de f.

Exercice 11 :

On considère les points A, B , S et Ω d'affixes respectives : $a=-2+4i$, $b=-4+2i$, $s=-5+5i$ et $w=-2+2i$

Et soient h l'homothétie de centre S et de rapport 3 , C l'image de A par l'homothétie h et D l'image de B par l'homothétie h .

1) a) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h .

b) Montrer que l'affixe du point C est $c=4+2i$ et l'affixe du point D est $d=-2-4i$.

c) Montrer que les points A, B , C et D sont cocycliques.

2) soit P le milieu du segment $[AC]$.

a) Déterminer p l'affixe du point P .

b) Montrer que : $\frac{w-p}{b-d}=\frac{1}{2}i$, puis en déduire que :

$DB=2P\Omega$ et que: $\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{P\Omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL3

2BACSPF-2BACSVT
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Fonctions logarithmes)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\frac{1}{2}-ln(x)+\frac{1}{2}(ln(x))^2$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat.

2) Vérifier que $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}ln(x)-1\right)ln(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ puis déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(ln(x))^2}{x}=0$ (on pourra poser $x=t^2$).

b) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta): y=x$ au voisinage de $+\infty$.

4) Vérifier que $\forall x\in]0;1[:\ (x-1)+ln(x)<0$ et que $\forall x\in[1;+\infty[:\ (x-1)+ln(x)\geq 0$

Correction

5) a) Montrer que $f'(x)=\frac{(x-1)+ln(x)}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$

6) a) Montrer que $f''(x)=\frac{2-ln(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

7) a) Montrer que $f(x)-x=\frac{1}{2}(ln(x)-1)^2$ pour tout x de $]0;+\infty[$

b) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$

c) En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) sur $]0;+\infty[$

8) Construire la droite (Δ) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$

9) On considère la fonction numérique h définie par $h(x)=f(|x|)$

a) Déterminer D_h le domaine de définition de la fonction h.

b) Montrer que h est une fonction paire.

c) Vérifier que $h(x)=f(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

d) Déduire le tableau de variations de h sur D_h .

Exercice 2 (Les nombres complexes)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-2z+2=0$

2) On pose $a=1-i$ et $b=2+\sqrt{3}+i$

a) Écrire a sous forme trigonométrique

b) Vérifier que $\frac{b}{a}=\left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ puis écrire b sous forme trigonométrique

c) Déduire que b^6 est un nombre imaginaire pur

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $c=-1+i\sqrt{3}$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Exprimer z' en fonction de z

b) Vérifier que le point est l'image du point B par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC

4) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2-\sqrt{3}-i|=|z+1-i\sqrt{3}|$

a) Déterminer l'ensemble (E)

b) En déduire que le milieu du segment $[BC]$ appartient à l'ensemble (E)

HIYAB

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS3

2BACSPF-A

1heures

Aissa HIYAB

- ✓ **Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**
- ✓ **Chaque tentative de tricher vaut un zéro.**

Exercice 1

Soit z_1 et z_2 les nombres complexes définis par : $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3}+i$

1) Montrer que $|z_1| = \sqrt{2}$ et $|z_2| = 2$ 2pt

2) a) Montrer que $arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ 2pt

b) En déduire la forme trigonométrique de z_1 et de z_2 ..... 2pt

c) Déterminer la forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$ 2pt

3) Montrer que la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$ est $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}i$ 2pt

4) En déduire la valeur de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 1pt

5) Montrer que $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2028} + \left(\frac{z_2}{2}\right)^{2028} = 0$ 1pt

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points $A(1+6i)$; $B(-4+3i)$; $C(1)$; $D(6+3i)$

1) a) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme. 1pt

b) Montrer que $(AC) \perp (DB)$ 1pt

c) En déduire que $ABCD$ est un losange. 1pt

2) Déterminer l'affixe du point I le centre de $ABCD$ 1pt

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points $A(1+6i)$; $B(-4+3i)$; $C(-9)$; $D(4+i)$; $E(-6-5i)$

1) Montrer que les points A, B et C sont alignés. 1pt

2) Montrer que $(AB) \parallel (DE)$ 1pt

3) Montrer que le triangle ABD est rectangle et isocèle en A. 1pt

4) Soit θ un nombre réel. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(cos(\theta)+isin(\theta))^n = cos(n\theta)+isin(n\theta)$ 1pt

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DS3

2BACSPF-B

1heures

Aissa HIYAB

- ✓ **Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**
- ✓ **Chaque tentative de tricher vaut un zéro.**

Exercice 1

Soit z_1 et z_2 les nombres complexes définis par : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$

1) Montrer que $|z_1| = 2$ et $|z_2| = \sqrt{2}$ 2pt

2) a) Montrer que $arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ 2pt

b) En déduire la forme trigonométrique de z_1 et de z_2 ..... 2pt

c) Déterminer la forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$ 2pt

3) Montrer que la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$ est $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$ 2pt

4) En déduire la valeur de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 1pt

5) Montrer que $\left(\frac{z_1}{2}\right)^{2028} + \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{2028} = 0$ 1pt

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points $A(-1+6i)$; $B(-6+3i)$; $C(-11)$; $D(2+i)$; $E(-8-5i)$

1) Montrer que les points A, B et C sont alignés. 1pt

2) Montrer que $(AB) \parallel (DE)$ 1pt

3) Montrer que le triangle ABD est rectangle et isocèle en A. 1pt

4) Soit θ un nombre réel. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\left(cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)$ 1pt

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points $A(-1+6i)$; $B(-6+3i)$; $C(-1)$; $D(4+3i)$

1) a) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme. 1pt

b) Montrer que $(AC) \perp (DB)$ 1pt

c) En déduire que $ABCD$ est un losange. 1pt

2) Déterminer l'affixe du point I le centre de $ABCD$ 1pt

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب
ثانوية المجد التأهيلية أيت ملول

Examen National blanc

2ème baccalauréat Science expérimentale

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

Lycée : Almajd	Prof : Aissa HIYAB

Matière	Mathématique	Durée	3 heures
Filière	Science expérimentale : PC et SVT	Coefficient	7

INSTRUCTION GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.
- ✓ Ecrire lisiblement et vérifier que le sujet est complet : il comporte 3 pages numérotées de 1 à4, celle-ci est comprise.
- ✓ Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen.

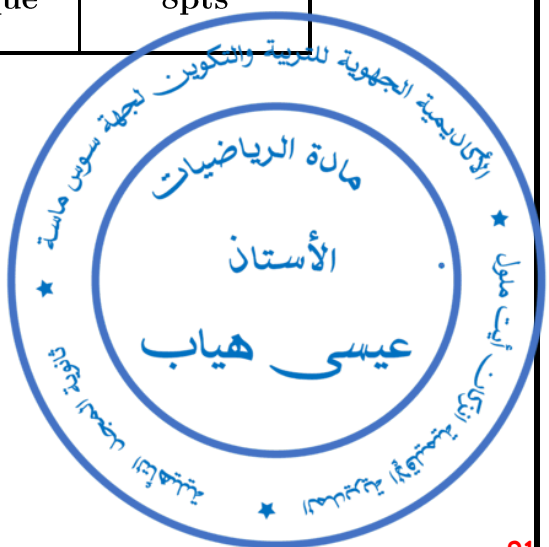
COMPOSANTS DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartie suivant les domaines comme suite :

Exercice 1	Suites Numériques	2pts
Exercice 2	Suites Numériques	4pts
Exercice 3	Nombres complexes	3pts
Exercice 4	Nombres complexes	3pts
Problème	Etude d'une fonction numérique	8pts

- ✓ ln Désigne la fonction logarithme népérien
- ✓ $\bar{a}$ le conjuguée du nombre complexe a .

Correction



2ème Baccalauréat

Science expérimentale : PC et SVT

Exercice1

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*);\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4-u_n} \end{cases}$

0.5pt 1/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\quad u_n < 2$.

0.25pt 2/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-2)^2}{4-u_n}$.

0.25pt b/ En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$

0.5pt 3/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\quad \dfrac{1}{u_{n+1}-2} = \dfrac{1}{u_n-2} - \dfrac{1}{2}$.

0.5pt b/ En déduire u_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice2

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+2} \end{cases}$

0.5pt 1/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});\quad 0 < u_n < \sqrt{3}$.

0.25pt 2/ a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{3-u_n^2}{u_n+2}$.

0.5pt b/ En déduire que la suite (u_n) est convergente

0.75pt 3 /a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad 0 < \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} - u_n\right)$.

0.75pt b/ En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad 0 < \sqrt{3} - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

0.25pt c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \dfrac{u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}}{n}$

0.5pt a/ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\quad w_n < u_n$

0.5pt b/ En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\quad w_n < \sqrt{3}$

Correction

المادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exercice3

0.5pt 1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i$, $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$ et $c=\sqrt{3}-i$

0.75pt a/ Ecrire c sous forme trigonométrique puis montrer que $c^6=-64$

1pt b/ Montrer que $(1+i)c=a$ et $i\bar{a}=b$ puis déduire la forme trigonométrique de a et de b

0.5pt c/ Calculer $\arg(\frac{b}{a})$, puis déduire la nature du triangle OAB

0.25pt d/ Soit D le point d'affixe $d=1+(\sqrt{3}-4)i$

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan vérifiant : $|z-1+i(4-\sqrt{3})|=2$.

Exercice4

Correction

Les questions 1/2/3/ sont indépendantes.

1.25pt 1/ On pose $a=1-i\sqrt{3}$, $b=1+i\sqrt{3}$ et $c=2$

Montrer que $a^{2028}+b^{2028}=-c^{2029}$

0.5pt 2/ Soit $\theta\in]0;\pi[$, on pose $z_1=sin(\theta)(1-i)$

Montrer que $|z_1|=\sqrt{2}sin(\theta)$ et $arg(z_1)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

3/ Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, on pose $z_2=b-(cos(\alpha)+isin(\alpha))\bar{b}$ tel que $b=-1+i$

0.75pt a/ Montrer que $z_2=2\sqrt{2}\times sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\times i\times e^{i\frac{\alpha}{2}}$ (on rappelle que :

$sin(x)=2cos(\frac{x}{2})sin(\frac{x}{2})$ et $cos^2(\frac{x}{2})=\frac{1+cos(x)}{2}$ et $sin^2(\frac{x}{2})=\frac{1-cos(x)}{2}$)

0.5pt b/ En déduire $|z_2|$ et $arg(z_2)$

Problème :

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2\ln(x)-1+\frac{1}{x}$

0.5pt 1/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$

0.5pt 2/ Montrer que $g'(x)=\frac{2x-1}{x^2}$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

0.5pt 3/ Dresser le tableau de variations de g

0.75pt 4/ a/ Calculer $g(1)$ puis montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0;\frac{1}{2}[$

0.5pt b/ Dresser le tableau de signe de g sur $]0;+\infty[$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

2ème Baccalauréat
Science expérimentale : PC et SVT

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=x^2\left(ln(x)-1\right)+x & ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

0.5pt 1/ a/ Montrer que f est continue à droite en 0

0.75pt b/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

0.75pt 2/ Montrer que $f(\alpha)=\frac{\alpha}{2}(1-\alpha)$ et $0<f(\alpha)<\frac{1}{4}$

1pt 3/ a/ Montrer que $f'(x)=xg(x)$ pour tout $x\in[0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f.

0.25pt b/ En déduire que $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$

4/ Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0.5pt a/ Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

0.5pt b/ Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=x$

1pt c/ Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Correction

HIAB

Tronc commun sciences et tronc commun technologique
15 Cours bien détaillés
15 Résumés bien précis
15 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libres corrigés
06 Devoirs surveillés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Première année Bac sciences expérimentales
12 Cours bien détaillés
12 Résumés bien précis
12 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

2BACSPF & 2BACSVTF
12 Cours bien détaillés
12 Résumés bien précis
12 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
Extraits du bac
05 Examens blancs corrigés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Première année Bac Sciences Mathématiques
14 Cours bien détaillés
14 Résumés bien précis
14 Séries d'exercices
08 Devoirs libres corrigés
16 Devoirs surveillés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

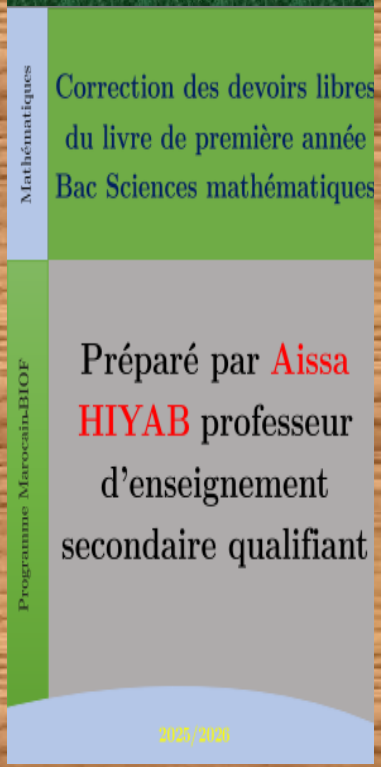
2BSM A&B
Résumés des cours
08 Séries d'exercices et problèmes
06 Devoirs libres corrigés
Extraits du bac
Examen blanc corrigé
Astuces pour les concours
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

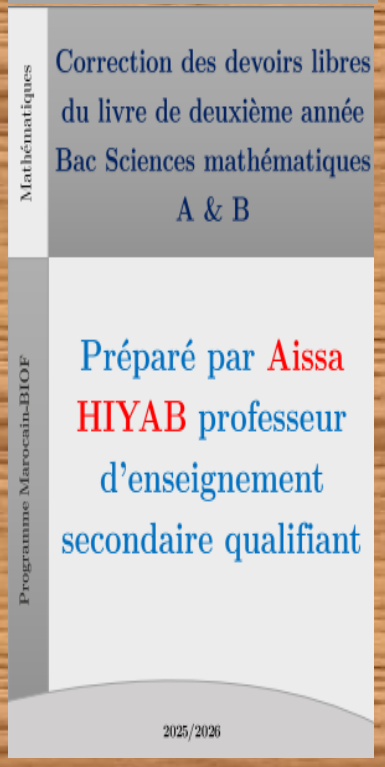
Première année Bac sciences économiques et la gestion
10 Cours bien détaillés
10 Résumés bien précis
10 Séries d'exercices
06 Devoirs libres corrigés
06 Devoirs surveillés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

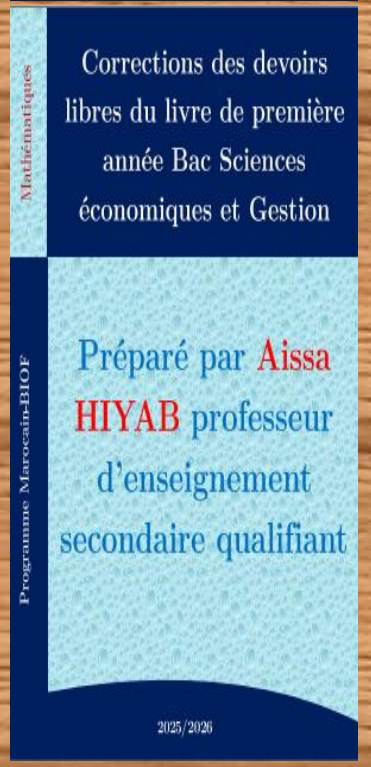
Mathématiques
Exercices résolus pour
Tronc commun sciences et tronc commun technologique
Correction bien detaillée de 185 exercices
Programme Marocain
15 Séries d'exercices corrigées
6 Devoirs libres corrigés
6 Devoirs surveillés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Mathématiques
Exercices résolus pour
Première année Bac sciences expérimentales
Correction bien detaillée de 156 exercices
Programme Marocain
12 Séries d'exercices corrigées
6 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Mathématiques
Exercices résolus pour
2BACSPF & 2BACSVTF
Correction bien detaillée de 177 exercices
Programme Marocain
12 Séries d'exercices corrigées
6 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
5 Examens blancs corrigés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant


Mathématiques
Correction des devoirs libres du livre de première année Bac Sciences mathématiques
Programme Marocain-BIOF
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2025/2026


Mathématiques
Correction des devoirs libres du livre de deuxième année Bac Sciences mathématiques A & B
Programme Marocain-BIOF
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2025/2026


Mathématiques
Corrections des devoirs libres du livre de première année Bac Sciences économiques et Gestion
Programme Marocain-BIOF
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2025/2026